!CHAPTER 2
UNIONS¡

! This chapter introduces the notion of union (of those things satisfying one of two predicates). The union of **P** and **Q**, written (**P** ∪ **Q**), is satisfied by all those things which are either satisfied by **P** or **Q**. ¡

! **1.** ∪ represents union (of one-place predicates). ¡

𝔻 ∪ ; (**P** ∪ **Q**) ; ; {a : **P**[a] ∨ **Q**[a]} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Unions.** The definition in P1 is only used in this chapter to prove this fundamental proposition. In turn, P2 is only used in the proofs of P3 and P4. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] ⇔ P[x] ∨ Q[x]) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ({a : **P**[a] ∨ **Q**[a]}[x] ⇔ **P**[x] ∨ **Q**[x])
,! 2 (Pred) ¡

∀x ((**P** ∪ **Q**)[x] ⇔ **P**[x] ∨ **Q**[x]) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] ⇔ P[x] ∨ Q[x]) ! 4 (∀I:1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Unions, First Half.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] ⇒ P[x] ∨ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] ⇒ P[x] ∨ Q[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Unions, Second Half.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (P[x] ∨ Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] ∨ Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ! 6 (∀I: 5) ¡

▯

! The next few propositions (P5 to P11) continue in the vein of the Fundamental Proposition, and express simple ways in which the satisfaction or non-satisfaction of a union relate to the satisfaction or non-satisfaction of the predicates.
Remark that proofs in the rest of the chapter never appeal to P7 through P11. (They will be appealed to in subsequent chapters, however, e.g. P7 in the next to prove Distributivity of Intersections and Unions.) ¡

! **5.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (P[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 3 (∨I: 2) ¡

(**P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 4 (∀E: P4) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

P[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(**P**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

Q[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 3 (∨I: 2) ¡

(**P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 4 (∀E: P4) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(P ∪ Q)[x] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P∀Q∀x (Q[x] ⇒ (P ∪ Q)[x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **7. Process of Elimination,** for unions n1. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x]) ¡

P,Q,x ,! 1 (Prem) ¡

(P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ,! 2 (Prem) ¡

(P ∪ Q)[x] ,! 3 (&E: 2) ¡

((P ∪ Q)[x] ⇒ P[x] ∨ Q[x]) ,! 4 (∀E: P3) ¡

(P ∪ Q)[x] ⇒ P[x] ∨ Q[x] ,! 5 (()E: 4) ¡

P[x] ∨ Q[x] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(P[x] ∨ Q[x]) ,! 7 (()I: 6) ¡

¬ P[x] ,! 8 (&E: 2) ¡

(P[x] ∨ Q[x]) & ¬ P[x] ,! 9 (&I: 7,8) ¡

((P[x] ∨ Q[x]) & ¬ P[x] ⇒ Q[x]) ,! 10 (∀E: I3.11) ¡

(P[x] ∨ Q[x]) & ¬ P[x] ⇒ Q[x] ,! 11 (()E: 10) ¡

Q[x] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **8. Process of Elimination,** for unions n2. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] & ¬ Q[x] ⇒ P[x]) ¡

P,Q,x ,! 1 (Prem) ¡

(P ∪ Q)[x] & ¬ Q[x] ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 4 (∀E: P3) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 6 (⇒E) ¡

(**P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 7 (()I) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 8 (&E) ¡

(**P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) & ¬ **Q**[**x**] ,! 9 (&I) ¡

((**P**[x] ∨ **Q**[**x**]) & ¬ **Q**[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 10 (∀E: I3.12) ¡

(**P**[x] ∨ **Q**[**x**]) & ¬ **Q**[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 11 (()E: 10) ¡

P[**x**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 14 (()I:13) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∪ Q)[x] & ¬ Q[x] ⇒ P[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! P9 and P10 are the contrapositives of P5 and P6, respectively. ¡

! **9.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ P[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

(**P**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 4 (∀E: P5) ¡

P[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

P[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ P[x]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **10.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

Q[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

(**Q**[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**]) ,! 4 (∀E: P6) ¡

Q[**x**] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

Q[**x**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ Q[x]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ P[x] & ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 3 (∀E: P9) ¡

¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 6 (∀E: P10) ¡

¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

¬ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∪ Q)[x] ⇒ ¬ P[x] & ¬ Q[x])
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! In this chapter propositions after P14 (i.e. from P21 on) make no appeals to P1 through P11, i.e. subsequently only P12, P13,and P14 are used. P12 appeals to P5, P13 to P6, and P14 to P3. ¡

! **12. Inclusion in Unions, Left.** ¡

⊢ ∀P∀Q P ⊆ (P ∪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ (**P** ∪ **Q**)[x]) ,! 2 (∀E: P5) ¡

P ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 3 (𝕊I C1.1,2) ¡

∀P∀Q P ⊆ (P ∪ Q) ! 4 (∀I) ¡

▯

! **13. Inclusion in Unions, Right.** ¡

⊢ ∀P∀Q P ⊆ (Q ∪ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ (**Q** ∪ **P**)[x]) ,! 2 (∀E: P6) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (𝕊I: C1.1,2) ¡

∀P∀Q P ⊆ (Q ∪ P) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **14. Inclusion of Unions.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ R & Q ⊆ R ⇒ (P ∪ Q) ⊆ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** & **Q** ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

∀x(**P**[x] ⇒ **R**[x]) ,! 4 (𝕊E: C1.1,3) ¡

Q ⊆ **R** ,! 5 (&E: 2) ¡

∀x(**Q**[x] ⇒ **R**[x]) ,! 6 (𝕊E: C1.1,5) ¡

x ,! 7 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ,! 8 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 9 (∀E: P3) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

P[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**P**[**x**] ⇒ **R**[**x**]) ,! 12 (∀E: 4) ¡

P[**x**] ⇒ **R**[**x**] ,! 13 (()E: 12) ¡

(**Q**[**x**] ⇒ **R**[**x**]) ,! 14 (∀E: 6) ¡

Q[**x**] ⇒ **R**[**x**] ,! 15 (()E: 14) ¡

R[**x**] ,! 16 (∨E: 11,13,15) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **R**[**x**] ,! 17 (⇒I: 8,16) ¡

((**P** ∪ **Q**)[**x**] ⇒ **R**[**x**]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀x((**P** ∪ **Q**)[x] ⇒ **R**[x]) ,! 19 (∀I: 18) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ,! 20 (𝕊I: C1.1,19) ¡

P ⊆ **R** & **Q** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(**P** ⊆ **R** & **Q** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **R**) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ R & Q ⊆ R ⇒ (P ∪ Q) ⊆ R) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! P15-P20 concern the Commutative Laws of Union. ¡

! **15. Commutative Law of Union Around Inclusion.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ∪ Q) ⊆ (Q ∪ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 2 (∀E: P13) ¡

Q ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (∀E: P12) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **P**) & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ (**Q** ∪ **P**) & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **P**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**))
,! 5 (∀E: P14) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **P**) & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **P**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q (P ∪ Q) ⊆ (Q ∪ P) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **16. Commutative Law of Union Around Equivalence.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ∪ Q) ≡ (Q ∪ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 2 (∀E: P15) ¡

(**Q** ∪ **P**) ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 3 (∀E: P15) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**) & (**Q** ∪ **P**) ⊆ (**P** ∪ **Q**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**) & (**Q** ∪ **P**) ⊆ (**P** ∪ **Q**)
⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**))
,! 5 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**Q** ∪ **P**) & (**Q** ∪ **P**) ⊆ (**P** ∪ **Q**)
⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q (P ∪ Q) ≡ (Q ∪ P) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **17. Commutative Law of Union On Inclusion Left.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∪ P) ⊆ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (∀E: P16) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **R**)
,! 5 (∀E: C1.30) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∪ **P**) ⊆ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **R** ,! 8 (⇒I: 2,8) ¡

((**P** ∪ **Q**) ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **R**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∪ P) ⊆ R) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! 18. Commutative Law of Union On Inclusion Right. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (R ⊆ (P ∪ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∪ P)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

R ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (∀E: P16) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **P**))
,! 5 (∀E: C1.32) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

R ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **P**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **P**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (R ⊆ (P ∪ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∪ P)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! 19. Commutative Law of Union On Equivalence Left. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ≡ R ⇒ (Q ∪ P) ≡ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (∀E: P16) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **R**)
,! 5 (∀E: C1.19) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **R** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **R**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ≡ R ⇒ (Q ∪ P) ≡ R) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **20. Commutative Law of Union On Equivalence Right.** ¡

├ ∀P∀Q∀R (R ≡ (P ∪ Q) ⇒ R ≡ (Q ∪ P)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 3 (∀E: P16) ¡

R ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∪ **P**))
,! 5 (∀E: C1.15) ¡

R ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∪ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

R ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∪ **P**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (R ≡ (P ∪ Q) ⇒ R ≡ (Q ∪ P)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! The next couple of propositions (P21-P22) are commutative permutations. P21 is an immediate consequence of P12 and the Transitivity of Inclusion. ¡

! **21.** ¡

├ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

Q ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 3 (∀E: P12) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**))
,! 5 (∀E: C1.5) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (Q ∪ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **22.** The use of Commutativity costs a step (11 against 10), but permits a more elegant proof. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ P ⊆ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**R** ∪ **Q**)) ,! 3 (∀E: P21) ¡

P ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**R** ∪ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ (**R** ∪ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ⊆ (**R** ∪ **Q**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**)) ,! 6 (∀E: P18) ¡

P ⊆ (**R** ∪ **Q**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 7 (()E: 6) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **R**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ P ⊆ (Q ∪ R)) ! 11 (∀I:1,10) ¡

▯

! The next couple of propositions (P23-P24) are commutative permutations. P23 is an immediate consequence of P14 and the Reflexivity of Inclusion. ¡

! **23.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ Q) ⊆ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

Q ⊆ **Q** ,! 3 (∀E: 1.4) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **Q** ,! 4 (&I) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q**) ,! 5 (∀E: P14) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ Q) ⊆ Q) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **24.** The use of Commutativity costs a step (11 against 10), but permits a more elegant proof. ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∪ P) ⊆ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q**) ,! 3 (∀E: P23) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **Q**) ,! 6 (∀E: P17) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **Q** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**Q** ∪ **P**) ⊆ **Q** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **Q** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ⊆ **Q**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∪ P) ⊆ Q) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **25.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ Q) ≡ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (∀E: P13) ¡

P ⊆ **Q** ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q**) ,! 4 (∀E: P21) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 7 (&I: 2,6) ¡

((**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**)
,! 8 (∀E: 1.8) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ **Q** & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ Q) ≡ Q) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **26.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∪ P) ≡ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**) ,! 3 (∀E: P25) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q**) ,! 6 (∀E: P19) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∪ P) ≡ Q) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **27. Idempotency of Union (Relative to Equivalence).** ¡

⊦ ∀P (P ∪ P) ≡ P ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 2 (∀E: C1.4) ¡

(**P** ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ **P**) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: P25) ¡

P ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ **P**) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **P**) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (P ∪ P) ≡ P ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! P28-P31 form a group of propositions, which are permutations of the same theme. Remark that P30 and P31 are the converses of P25 and P26, respectively. ¡

! **28.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ≡ (P ∪ Q) ⇒ Q ⊆ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (Prem) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 3 (∀E: P13) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ (**P** ∪ **Q**) & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P**)
,! 5 (∀E: C1.31) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) & **Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

Q ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ≡ (P ∪ Q) ⇒ Q ⊆ P) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **29.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ≡ (Q ∪ P) ⇒ Q ⊆ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **P** ≡ (**P** ∪ **Q**)) ,! 3 (∀E: P20) ¡

P ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **P** ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 6 (∀E: P28) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

Q ⊆ **P** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ≡ (Q ∪ P) ⇒ Q ⊆ P) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **30.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P ∪ Q) ≡ Q ⇒ Q ⊆ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ≡ (**P** ∪ **Q**)) ,! 3 (∀E: C1.10) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,5) ¡

(**P** ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 6 (∀E: P28) ¡

P ≡ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

Q ⊆ **P** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q ((P ∪ Q) ≡ Q ⇒ Q ⊆ P) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **31.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((Q ∪ P) ≡ P ⇒ Q ⊆ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

((**Q** ∪ **P**) ≡ **P** ⇒ **P** ≡ (**Q** ∪ **P**)) ,! 3 (∀E: C1.10) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **P** ⇒ **P** ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 6 (∀E: P29) ¡

P ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

Q ⊆ **P** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**Q** ∪ **P**) ≡ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q ((Q ∪ P) ≡ P ⇒ Q ⊆ P) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P32, P33, and P34 state that unions maintain inclusion, for both positions (P32), for the left position only (P33), and for the right position (P34). ¡

! **32.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ Q & R ⊆ S ⇒ (P ∪ R) ⊆ (Q ∪ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

R ⊆ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **S**)) ,! 5 (∀E: P21) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**R** ⊆ **S** ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **S**)) ,! 8 (∀E: P22) ¡

R ⊆ **S** ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 9 (()E: 8) ¡

R ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **S**) & **R** ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 11 (&I: 7,10) ¡

(**P** ⊆ (**Q** ∪ **S**) & **R** ⊆ (**Q** ∪ **S**) ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**)) ,! 12 (∀E: P14) ¡

P ⊆ (**Q** ∪ **S**) & **R** ⊆ (**Q** ∪ **S**) ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 13 (()E: 12) ¡

(**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**)) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ Q & R ⊆ S ⇒ (P ∪ R) ⊆ (Q ∪ S)) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! P33 and P34 are corollaries to P32. ¡

! **33.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ R) ⊆ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ⊆ **R** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ,! 4 (&E: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **R**)) ,! 5 (∀E: P32) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∪ R) ⊆ (Q ∪ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **34.** Instead of appealing to P33 and using Commutativity twice, the proof proceeds as does P33's. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∪ P) ⊆ (R ∪ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ⊆ **R** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

R ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ,! 4 (&E: 2,3) ¡

(**R** ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ⊆ (**R** ∪ **Q**))
,! 5 (∀E: P32) ¡

R ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ⊆ (**R** ∪ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∪ **P**) ⊆ (**R** ∪ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ⊆ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ⊆ (**R** ∪ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∪ P) ⊆ (R ∪ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! The theme that union maintains equivalence is an important one, which explains why so many different variations (P32-P51) are stated. P35 appeals to P32, and the others (P36-P51) appeal to P35, directly or indirectly. The propositions break into four classes of similar form, which are various permutations of each other: P35, P36 to P39, P40 to P43, and P44 to P51. ¡

! **35.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≡ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P**) ,! 5 (∀E: C1.13) ¡

P ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

P ⊆ **Q** ,! 8 (&E: 7) ¡

Q ⊆ **P** ,! 9 (&E: 8) ¡

(**R** ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R**) ,! 10 (∀E: C1.13) ¡

R ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 11 (()E: 10) ¡

R ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 12 (⇒E: 4,11) ¡

R ⊆ **S** ,! 13 (&E: 12) ¡

S ⊆ **R** ,! 14 (&E: 12) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ,! 15 (&I: 8,13) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**))
,! 16 (∀E: P32) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 17 (()E: 16) ¡

(**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

Q ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ,! 19 (&I: 9,14) ¡

(**Q** ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**))
,! 20 (∀E: P32) ¡

Q ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**) ,! 21 (()E: 20) ¡

(**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) & (**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**)
,! 23 (&I: 18,22) ¡

((**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) & (**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**)
⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 24 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∪ **R**) ⊆ (**Q** ∪ **S**) & (**Q** ∪ **S**) ⊆ (**P** ∪ **R**)
⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**)
,! 25 (()E: 24) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 28 (()I: 27) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ S))

! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** ,! 4 (&E: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**))
,! 5 (∀E: P35) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **37.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (R ∪ P) ≡ (R ∪ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** ,! 4 (&E: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **P** ≡ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ≡ (**R** ∪ **Q**))
,! 5 (∀E: P36) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∪ **P**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ (**R** ∪ **P**) ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (R ∪ P) ≡ (R ∪ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **38.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∪ R) ≡ (R ∪ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**)) ,! 3 (∀E: P36) ¡

P ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**))
,! 6 (∀E: P20) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **R**) ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∪ R) ≡ (R ∪ Q)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **39.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (Q ≡ P ⇒ (P ∪ R) ≡ (R ∪ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

(**Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q**) ,! 3 (∀E: C1.10) ¡

Q ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ **Q** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 6 (∀E: P38) ¡

P ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

Q ≡ **P** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**Q** ≡ **P** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q∀R (Q ≡ P ⇒ (P ∪ R) ≡ (R ∪ Q)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **40.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P ∪ R) ⇒ T ≡ (Q ∪ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 5 (∀E: P35) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**T** ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

T ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ (**Q** ∪ **S**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P ∪ R) ⇒ T ≡ (Q ∪ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **41.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & R ≡ S & (P ∪ R) ≡ T ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ Q & R ≡ S ,! 3 (&E: 2) ¡

(P ∪ R) ≡ T ,! 4 (&E: 2) ¡

(P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ S))
,! 5 (∀E: P35) ¡

P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∪ R) ≡ (Q ∪ S) ,! 6 (()E: 5) ¡

(P ∪ R) ≡ (Q ∪ S) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(P ∪ R) ≡ (Q ∪ S) & (P ∪ R) ≡ T ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((P ∪ R) ≡ (Q ∪ S) & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T)
,! 9 (∀E: C1.19) ¡

(P ∪ R) ≡ (Q ∪ S) & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T
,! 10 (()E: 9) ¡

(Q ∪ S) ≡ T ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ Q & R ≡ S & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(P ≡ Q & R ≡ S & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **42.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∪ R) ⇒ T ≡ (Q ∪ S)) ¡

P,Q,R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∪ R) ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (P ∪ R) ,! 4 (&E: 2) ¡

(Q ≡ P & S ≡ R ⇒ (Q ∪ S) ≡ (P ∪ R))
,! 5 (∀E: P35) ¡

Q ≡ P & S ≡ R ⇒ (Q ∪ S) ≡ (P ∪ R) ,! 6 (()E: 5) ¡

(Q ∪ S) ≡ (P ∪ R) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (**P** ∪ **R**) & (**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**T** ≡ (**P** ∪ **R**) & (**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 9 (∀E: C1.17) ¡

T ≡ (**P** ∪ **R**) & (**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (**Q** ∪ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & **T** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** & **T** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∪ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∪ R) ⇒ T ≡ (Q ∪ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **43.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** ∪ **R**) ≡ **T** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**))
,! 5 (∀E: P35) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ **T**)
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

(**Q** ∪ **S**) ≡ (**P** ∪ **R**) & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ **T**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**Q** ∪ **S**) ≡ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ **T**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∪ **S**) ≡ **T**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P ∪ R) ≡ T ⇒ (Q ∪ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P44 to P51 are consequences of P40 to P43. They do not appeal to P35 directly. Their proofs are cookie cutter copies of each other. ¡

! **44.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P ∪ R) ≡ S ⇒ (Q ∪ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P41) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P ∪ R) ≡ S ⇒ (Q ∪ R) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **45.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∪ **R**))
,! 5 (∀E: P40) ¡

P ≡ Q & R ≡ R & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (Q ∪ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ Q & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **46.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ R & P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ≡ R & P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S)
,! 5 (∀E: P41) ¡

R ≡ R & P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S
,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∪ Q) ≡ S ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **47.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R ∪ P) ⇒ S ≡ (R ∪ Q)) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & S ≡ (R ∪ P) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E C1.9) ¡

R ≡ R & P ≡ Q & S ≡ (R ∪ P) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**))
,! 5 (∀E: P40) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R ∪ P) ⇒ S ≡ (R ∪ Q))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **48.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P ∪ R) ≡ S ⇒ (Q ∪ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P43) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & (**P** ∪ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∪ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P ∪ R) ≡ S ⇒ (Q ∪ R) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **49.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∪ **R**))
,! 5 (∀E: P42) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∪ **R**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∪ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∪ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∪ **R**)) ,! 9 (()I: 1,8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P ∪ R) ⇒ S ≡ (Q ∪ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **50.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∪ **Q**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P43) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∪ **Q**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∪ **Q**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∪ **Q**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & (**R** ∪ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∪ **Q**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R ∪ P) ≡ S ⇒ (R ∪ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **51** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (R ∪ P) ⇒ S ≡ (R ∪ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**))
,! 5 (∀E: P42) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∪ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∪ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (R ∪ P) ⇒ S ≡ (R ∪ Q))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! The final four propositions (P52-P55) concern the Associative Laws of Union. ¡

! **52. Associative Law of Union around Inclusion n1.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∪ R) ⊆ (P ∪ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 2 (∀E: P12) ¡

(**Q** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)))
,! 3 (∀E: P34) ¡

Q ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ (**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 6 (∀E: P13) ¡

(**R** ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ **R** ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))) ,! 7 (∀E: P22) ¡

R ⊆ (**Q** ∪ **R**) ⇒ **R** ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 8 (()E: 7) ¡

R ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) & **R** ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
,! 10 (&I: 5,9) ¡

((**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) & **R** ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
⇒ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)))
,! 11 (∀E: P14) ¡

(**P** ∪ **Q**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) & **R** ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
⇒ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
,! 12 (()E: 11) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∪ R) ⊆ (P ∪ (Q ∪ R)) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 53. Associative Law of Union around Inclusion n2. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∪ R)) ⊆ ((P ∪ Q) ∪ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (∀E: P12) ¡

(**P** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **P** ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)) ,! 3 (∀E: P21) ¡

P ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ **P** ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 6 (∀E: P13) ¡

(**Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ (**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**))
,! 7 (∀E: P33) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) ⇒ (**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
,! 8 (()E: 7) ¡

(**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

P ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) & (**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
,! 10 (&I: 5,9) ¡

(**P** ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) & (**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**))
,! 11 (∀E: P14) ¡

P ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) & (**Q** ∪ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
,! 12 (()E: 11) ¡

(**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∪ R)) ⊆ ((P ∪ Q) ∪ R) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **54. Associative Law of Union around Equivalence n1.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∪ R) ≡ (P ∪ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 2 (∀E: P52) ¡

(**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 3 (∀E: P53) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
& (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
& (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
⇒ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)))
,! 5 (∀E: C1.8) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ⊆ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
& (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
⇒ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
,! 6 (()E: 5) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∪ R) ≡ (P ∪ (Q ∪ R)) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **55. Associative Law of Union around Equivalence n2.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∪ R)) ≡ ((P ∪ Q) ∪ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ,! 2 (∀E: P54) ¡

(((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∪ **Q**) ∪ **R**))
,! 3 (∀E: C1.10) ¡

(**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (**P** ∪ **Q**) ∪ **R**)
,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (**P** ∪ **Q**) ∪ **R**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∪ R)) ≡ ((P ∪ Q) ∪ R) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯