!CHAPTER 3

INTERSECTIONS¡

! This chapter introduces the notion of intersection (of those things satisfying both of two predicates). The intersection of **P** and **Q**, written (**P** ∩ **Q**), is satisfied by all those things satisfied by both **P** and **Q**.

There is a certain duality between this chapter and the chapter of unions, which are reflected in the propositions and the comments.

When the duals for certain propositions concerning unions are not asserted, it is by historical accident. ¡

! **1.** ∩ represents intersection (of one-place predicates). ¡

𝔻 ∩ ; (**P** ∩ **Q**) ; ; {a : **P**[a] & **Q**[a]} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Intersections.** The definition in P1 is only used in this chapter to prove this fundamental proposition. In turn, P2 is only used in the proofs of P3 and P4.
¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∩ Q)[x] ⇔ P[x] & Q[x]) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ({a : **P**[a] & **Q**[a]}[x] ⇔ **P**[x] & **Q**[x])
,! 2 (Pred) ¡

∀x ((**P** ∩ **Q**)[x] ⇔ **P**[x] & **Q**[x]) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∩ Q)[x] ⇔ P[x] & Q[x]) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Intersections, First Half.**
¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P ∩ Q)[x] ⇒ P[x] & Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & **Q**[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∩ Q)[x] ⇒ P[x] & Q[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Intersections, Second**

Half. ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall x \; (\; P[x] \;\&\; Q[x] \Rightarrow (P \cap Q)[x] \;)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \;)$,! 2 (∀E: P2) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 3 (()E) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}]$,! 4 (⇔E) ¡

$(\; \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \;)$,! 5 (()E) ¡

$\forall P \forall Q \forall x \; (\; P[x] \;\&\; Q[x] \Rightarrow (P \cap Q)[x] \;)$! 6 (∀I) ¡

□

! The next few propositions (P5 to P9) continue in the vein of the Fundamental Proposition, and express simple ways in which the satisfaction or non-satisfaction of an intersection relate to the satisfaction or non-satisfaction of the predicates.

Remark that proofs in the rest of the chapter never appeal to P7 through P9. ¡

! **5.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall x \; (\; (P \cap Q)[x] \Rightarrow P[x] \;)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}] \;)$,! 3 (∀E: P3) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}] \;\&\; \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 6 (&E: 5) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}] \;)$,! 8 (()I: 7) ¡

$\forall P \forall Q \forall x \; (\; (P \cap Q)[x] \Rightarrow P[x] \;)$! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **6.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall x \; (\; (P \cap Q)[x] \Rightarrow Q[x] \;)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})[\mathbf{x}]$,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

Q[**x**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P∀Q∀x ((P ∩ Q)[x] ⇒ Q[x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **7. Process of Elimination**, for intersections n1. ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] & P[x] ⇒ ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

P[**x**] ,! 4 (&E: 2) ¡

Q[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∩ **Q**)[**x**]) ,! 7 (∀E: P4) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 8 (()E: 7) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 3,9) ¡

Q[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] & P[x] ⇒ ¬ Q[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **8. Process of Elimination**, for intersections n2. Instead of repeating the previous proof, a new proof, which appeals to the previous proposition, is provided. (This is unlike the proof of the dual, C2.8, which was given the same proof as C2.7.) The advantage is variety, the disadvantage being the use of contradiction. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] & Q[x] ⇒ ¬ P[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **Q**[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

Q[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 5 (&E: 2) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 7 (∀E: P7) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 3,9) ¡

P[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] & Q[x] ⇒ ¬ P[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **9.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] ⇒ ¬ P[x] ∨ ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(**P**[**x**] ∨ ¬ **P**[**x**]) ,! 3 (∀E: I3.15) ¡

P[**x**] ∨ ¬ **P**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

P[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ,! 6 (&I: 2,5) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 7 (∀E: P7) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 10 (∨I: 9) ¡

P[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 12 (Prem) ¡

¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 13 (∨I: 12) ¡

¬ **P**[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 14 (⇒I: 12,13) ¡

¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 15 (∨E: 4,11,14) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ∨ ¬ **Q**[**x**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀P∀Q∀x (¬ (P ∩ Q)[x] ⇒ ¬ P[x] ∨ ¬ Q[x])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! Until Distributivity (P51 and P56), propositions from P13 until Distributivity of Union and Intersection (P51 and P56) make no appeals to P1 to P9, instead using only P10, P11, and P12. P10 appeals to P5, P11 to P6, and P12 to P4. ¡

! **10. Inclusion of Intersections, Left.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ∩ Q) ⊆ P ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ((**P** ∩ **Q**)[x] ⇒ **P**[x]) ,! 2 (∀E: P5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 ($I: P1.1,2) ¡

∀P∀Q (P ∩ Q) ⊆ P ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **11. Inclusion of Intersections, Right.** ¡

⊢ ∀P∀Q (Q ∩ P) ⊆ P ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ((**Q** ∩ **P**)[x] ⇒ **P**[x]) ,! 2 (∀E: P6) ¡

(**Q** ∩ **P**) ⊆ **P** ,! 3 ($I: P1.1,2) ¡

∀P∀Q (Q ∩ P) ⊆ P ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **12. Inclusion in Intersections.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q & P ⊆ R ⇒ P ⊆ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R**	,! 1 (Prem) ¡
P ⊆ **Q** & **P** ⊆ **R**	,! 2 (Prem) ¡
P ⊆ **Q**	,! 3 (&E: 2) ¡
∀x(**P**[x] ⇒ **Q**[x])	,! 4 (𝕊E: C1.1,3) ¡
P ⊆ **R**	,! 5 (&E: 2) ¡
∀x(**P**[x] ⇒ **R**[x])	,! 6 (𝕊E: C1.1,5) ¡
x	,! 7 (Prem) ¡
(**P**[**x**] ⇒ **Q**[**x**])	,! 8 (∀E: 4) ¡
P[**x**] ⇒ **Q**[**x**]	,! 9 (()E: 8) ¡
(**P**[**x**] ⇒ **R**[**x**])	,! 10 (∀E: 6) ¡
P[**x**] ⇒ **R**[**x**]	,! 11 (()E: 10) ¡
P[**x**]	,! 12 (Prem) ¡
Q[**x**]	,! 13 (⇒E: 9,12) ¡
R[**x**]	,! 14 (⇒E: 11,12) ¡
Q[**x**] & **R**[**x**]	,! 15 (&I: 13,14) ¡
(**Q**[**x**] & **R**[**x**] ⇒ (**Q** ∩ **R**)[**x**])	,! 16 (∀E: P4) ¡
Q[**x**] & **R**[**x**] ⇒ (**Q** ∩ **R**)[**x**]	,! 17 (()E: 16) ¡
(**Q** ∩ **R**)[**x**]	,! 18 (⇒E: 15,17) ¡
P[**x**] ⇒ (**Q** ∩ **R**)[**x**]	,! 19 (⇒I: 12,18) ¡
(**P**[**x**] ⇒ (**Q** ∩ **R**)[**x**])	,! 20 (()I: 19) ¡
∀x(**P**[x] ⇒ (**Q** ∩ **R**)[x])	,! 21 (∀I: 7,20) ¡
P ⊆ (**Q** ∩ **R**)	,! 22 (𝕊I: C1.1,21) ¡
P ⊆ **Q** & **P** ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **R**)	,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **P** ⊆ **R** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **R**)) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q & P ⊆ R ⇒ P ⊆ (Q ∩ R)) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! P13-P20 concern the Commutative Laws of Intersection. ¡

! **13. Commutative Law of Intersection Around Inclusion.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ∩ Q) ⊆ (Q ∩ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** ,! 2 (∀E: P11) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**))
,! 5 (∀E: P12) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q (P ∩ Q) ⊆ (Q ∩ P) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **14. Commutative Law of Intersection Around Equivalence.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 2 (∀E: P13) ¡

(**Q** ∩ **P**) ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 3 (∀E: P13) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**) & (**Q** ∩ **P**) ⊆ (**P** ∩ **Q**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**) & (**Q** ∩ **P**) ⊆ (**P** ∩ **Q**)
⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**))
,! 5 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ (**Q** ∩ **P**) & (**Q** ∩ **P**) ⊆ (**P** ∩ **Q**)
⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q (P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **15. Commutative Law of Intersection On Inclusion Left.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ⊆ R ,! 2 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & (P ∩ Q) ⊆ R ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & (P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R**)
,! 5 (∀E: C1.30) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & (P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R
,! 6 (()E: 5) ¡

(Q ∩ P) ⊆ R ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**(P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ⊆ R ⇒ (Q ∩ P) ⊆ R) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **16. Commutative Law of Intersection On Inclusion Right.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (R ⊆ (P ∩ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∩ P)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

R ⊆ (P ∩ Q) ,! 2 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & R ⊆ (P ∩ Q) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & R ⊆ (P ∩ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∩ P)**)
,! 5 (∀E: C1.32) ¡

(P ∩ Q) ≡ (Q ∩ P) & R ⊆ (P ∩ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∩ P)
,! 6 (()E: 5) ¡

R ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **R** ⊆ (**Q** ∩ **P**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (R ⊆ (P ∩ Q) ⇒ R ⊆ (Q ∩ P)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **17. Commutativity Law of Intersection On Equivalence Left.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ R ⇒ (Q ∩ P) ≡ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**)
,! 5 (∀E: C1.30) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ R ⇒ (Q ∩ P) ≡ R) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **18. Commutative Law of Intersection On Equivalence Right.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (R ≡ (P ∩ Q) ⇒ R ≡ (Q ∩ P)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ (**P** ∩ **Q**) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 3 (∀E: P14) ¡

R ≡ (**P** ∩ **Q**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ (**P** ∩ **Q**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**))
,! 5 (∀E: C1.15) ¡

R ≡ (**P** ∩ **Q**) & (**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

R ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (R ≡ (P ∩ Q) ⇒ R ≡ (Q ∩ P)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **19**. P19 is the contrapositive of P17. The proof presented here does not, however, appeal to P17 and proceed by contradiction. Instead, it uses C1.42. The advantage is that it is shorter even while avoiding the use of contradiction. The disadvantage is that, by failing to appeal to P17, its grounding is less intuitive. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (¬ (P ∩ Q) ≡ R ⇒ ¬ (Q ∩ P) ≡ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ ¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**)
,! 5 (∀E C1.42) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ ¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**
,! 6 (()E: 5) ¡

¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ ¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ **R** ⇒ ¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ **R**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (¬ (P ∩ Q) ≡ R ⇒ ¬ (Q ∩ P) ≡ R)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **20**. P20 is the contrapositive of P18. As with P19's, the proof does not appeal to P18 and proceed by contradiction. Instead, it uses C1.47. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (¬ R ≡ (P ∩ Q) ⇒ ¬ R ≡ (Q ∩ P)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ ¬ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**))
,! 5 (∀E: C1.47) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ (**Q** ∩ **P**) & ¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ ¬ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**)
,! 6 (()E: 5) ¡

¬ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ ¬ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(¬ **R** ≡ (**P** ∩ **Q**) ⇒ ¬ **R** ≡ (**Q** ∩ **P**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (¬ R ≡ (P ∩ Q) ⇒ ¬ R ≡ (Q ∩ P))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **21.** The next couple of propositions (P21-P22) are commutative permutations. P21 is an immediate consequence of P10 and the Transitivity of Inclusion. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ⊆ Q) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **R**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**)
,! 5 (∀E: C1.5) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ⊆ Q) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **22.** The use of Commutativity costs a step (11 against 10), but permits a more elegant proof. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∩ P) ⊆ Q) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**) ,! 3 (∀E: P21) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ **Q**) ,! 6 (∀E: P15) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ **Q** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**R** ∩ **P**) ⊆ **Q** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ **Q** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ **Q**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∩ P) ⊆ Q) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **23.** The next couple of propositions (P23-P24) are commutativve permutations. P23 is an immediate consequence of P12 and Reflexivity of Inclusion. ¡

⊢ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (P ∩ Q)) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**)) ,! 5 (∀E: P12) ¡

P ⊆ **P** & **P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (P ∩ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **24.** The use of Commutativity costs a step (11 against 10), but permits a more elegant proof. ¡

⊢ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (Q ∩ P)) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**)) ,! 3 (∀E: P23) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **P**)) ,! 6 (∀E: P16) ¡

P ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 7 (()E: 6) ¡

P ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **P**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**Q** ∩ **P**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ P ⊆ (Q ∩ P)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **25.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ Q) ≡ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 2 (∀E: P10) ¡

P ⊆ **Q** ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**)) ,! 4 (∀E: P23) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 5 (()E: 4) ¡

P ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ,! 7 (&I: 2,6) ¡

((**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P**)
,! 8 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∩ **Q**) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ Q) ≡ P) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **26.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∩ P) ≡ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: P25) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P**) ,! 6 (∀E: P17) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (Q ∩ P) ≡ P) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **27. Idempotency of Intersection (Relative to Equivalence)** ¡

⊦ ∀P (P ∩ P) ≡ P ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 2 (∀E: C1.4) ¡

(**P** ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **P**) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: P25) ¡

P ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (P ∩ P) ≡ P ,! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! The next couple of propositions (P28-P29) are commutative permutations. ¡

! **28.** ¡

⊢ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ Q ⇒ Q ⊆ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P**)
,! 5 (∀E: C1.30) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

Q ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** ⇒ **Q** ⊆ **P** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **Q** ⇒ **Q** ⊆ **P**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ Q ⇒ Q ⊆ P) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **29.** The use of commutativity costs a step (11 against 10). ¡

⊢ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ P ⇒ P ⊆ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: P17) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 6 (∀E P28) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 7 (()E: 6) ¡

P ⊆ **Q** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ P ⇒ P ⊆ Q)   ! 11 (∀I: 1,10)   ¡

□

! P30, P31, and P32 state that intersections maintain inclusion, for both positions (P30), for the left position only (P31), and for the right position (P32). ¡

! **30**. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ Q & R ⊆ S ⇒ (P ∩ R) ⊆ (Q ∩ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S**   ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S**   ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **Q**   ,! 3 (&E: 2) ¡

R ⊆ **S**   ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**)   ,! 5 (∀E: P21) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**   ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q**   ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **S**)   ,! 8 (∀E: P22) ¡

R ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ **S**   ,! 9 (()E: 8) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **S**   ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **S**   ,! 11 (&I: 7,10) ¡

((**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**))
,! 12 (∀E: P12) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**)
,! 13 (()E: 12) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**)   ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**)   ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**))
,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ Q & R ⊆ S ⇒ (P ∩ R) ⊆ (Q ∩ S))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **31**. P31 and P32 are corollaries to P30. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ⊆ **R** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **R**))
,! 5 (∀E: P30) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **R** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **32.** Instead of appealing to P31 and using Commutativity twice, the proof proceeds as does P31's. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∩ P) ⊆ (R ∩ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

R ⊆ **R** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

R ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ (**R** ∩ **Q**))
,! 5 (∀E: P30) ¡

R ⊆ **R** & **P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ (**R** ∩ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∩ **P**) ⊆ (**R** ∩ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ (**R** ∩ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **P**) ⊆ (**R** ∩ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ Q ⇒ (R ∩ P) ⊆ (R ∩ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! As it was with unions, the theme that intersection maintains equivalence is an important one, and again many different variations (P33-P47) are asserted. P33 appeals to P30, and the others (P34-P47) appeal to P33, directly or indirectly. The propositions break into four classes of similar form, which are various permutations of each other: P33, P34 to P35, P36 to P39, and P40 to P47. ¡

! **33.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S)) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≡ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P**) ,! 5 (∀E C1.13) ¡

P ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

P ⊆ **Q** ,! 8 (&E: 7) ¡

Q ⊆ **P** ,! 9 (&E: 7) ¡

(**R** ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R**) ,! 10 (∀E: C1.13) ¡

R ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 11 (()E: 10) ¡

R ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 12 (⇒E: 4,11) ¡

R ⊆ **S** ,! 13 (&E: 12) ¡

S ⊆ **R** ,! 14 (&E: 12) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ,! 15 (&I: 8,13) ¡

(**P** ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**))
,! 16 (∀E: P30) ¡

P ⊆ **Q** & **R** ⊆ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**) ,! 17 (()E: 16) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ (**Q** ∩ **S**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

Q ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ,! 19 (&I: 9,14) ¡

(**Q** ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ⊆ (**P** ∩ **R**))
,! 20 (∀E: P30) ¡

Q ⊆ **P** & **S** ⊆ **R** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ⊆ (**P** ∩ **R**) ,! 21 (()E: 20) ¡

(Q ∩ S) ⊆ (P ∩ R) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(P ∩ R) ⊆ (Q ∩ S) & (Q ∩ S) ⊆ (P ∩ R)
,! 23 (&I: 18,22) ¡

((P ∩ R) ⊆ (Q ∩ S) & (Q ∩ S) ⊆ (P ∩ R)
⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S))
,! 24 (∀E: P1.8) ¡

(P ∩ R) ⊆ (Q ∩ S) & (Q ∩ S) ⊆ (P ∩ R)
⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S)
,! 25 (()E: 24) ¡

(P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S))
,! 28 (()I: 27) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S))
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **34.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ Q & R ≡ R ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(P ≡ Q & R ≡ R ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R))
,! 5 (∀E: P33) ¡

P ≡ Q & R ≡ R ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R) ,! 6 (()E: 5) ¡

(P ∩ R) ≡ (Q ∩ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **35.** Applying P33 is much shorter to using P34 and two applications of Commutativity. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E C1.9) ¡

R ≡ R & P ≡ Q ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ≡ R & P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q))
,! 5 (∀E: P33) ¡

R ≡ R & P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∩ P) ≡ (R ∩ Q) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ Q ⇒ (R ∩ P) ≡ (R ∩ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **36.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S)) ¡

P,Q,R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P ∩ R) ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ Q & R ≡ S ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (P ∩ R) ,! 4 (&E: 2) ¡

(P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S))
,! 5 (∀E: P33) ¡

P ≡ Q & R ≡ S ⇒ (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ,! 6 (()E: 5) ¡

(P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (P ∩ R) & (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(T ≡ (P ∩ R) & (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ⇒ T ≡ (Q ∩ S))
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

T ≡ (P ∩ R) & (P ∩ R) ≡ (Q ∩ S) ⇒ T ≡ (Q ∩ S)

,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (**Q** ∩ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∩ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** ∩ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **37.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P ∩ R) ≡ T ⇒ (Q ∩ S) ≡ T) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ **T** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**))
,! 5 (∀E: P33) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**)
,! 9 (∀E: C1.19) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ (**Q** ∩ **S**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**Q** ∩ **S**) ≡ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P ∩ R) ≡ T ⇒ (Q ∩ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 38. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S)) ¡

P,Q,R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∩ R) ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (P ∩ R) ,! 4 (&E: 2) ¡

(Q ≡ P & S ≡ R ⇒ (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R))
,! 5 (∀E: P33) ¡

Q ≡ P & S ≡ R ⇒ (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R) ,! 6 (()E: 5) ¡

(Q ∩ S) ≡ (P ∩ R) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (P ∩ R) & (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(T ≡ (P ∩ R) & (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S))
,! 9 (∀E: C1.17) ¡

T ≡ (P ∩ R) & (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (Q ∩ S) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P ∩ R) ⇒ T ≡ (Q ∩ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 39. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P ∩ R) ≡ T ⇒ (Q ∩ S) ≡ T) ¡

P,Q,R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R & (P ∩ R) ≡ T ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ P & S ≡ R ,! 3 (&E: 2) ¡

(P ∩ R) ≡ T ,! 4 (&E: 2) ¡

(Q ≡ P & S ≡ R ⇒ (Q ∩ S) ≡ (P ∩ R))

,! 5 (∀E: P33) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ (**P** ∩ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∩ **S**) ≡ (**P** ∩ **R**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**Q** ∩ **S**) ≡ (**P** ∩ **R**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**Q** ∩ **S**) ≡ (**P** ∩ **R**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**)
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

(**Q** ∩ **S**) ≡ (**P** ∩ **R**) & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**Q** ∩ **S**) ≡ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** ∩ **S**) ≡ **T**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P ∩ R) ≡ T ⇒ (Q ∩ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **40.** P40 to P47 are consequences of P36-P39. They do not appeal to P33 directly. As with their duals (C2.44-C2.51), their proofs are cookie-cutter copies of each other. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P ∩ R) ≡ S ⇒ (Q ∩ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P37) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P ∩ R) ≡ S ⇒ (Q ∩ R) ≡ S)

! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **41.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R)) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & S ≡ (P ∩ R) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E C1.9) ¡

P ≡ Q & R ≡ R & S ≡ (P ∩ R) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(P ≡ Q & R ≡ R & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R))
,! 5 (∀E: P36) ¡

P ≡ Q & R ≡ R & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (Q ∩ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ Q & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **42.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ R & P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ≡ R & P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S)
,! 5 (∀E: P37) ¡

R ≡ R & P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S
,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∩ Q) ≡ S ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **43.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R ∩ P) ⇒ S ≡ (R ∩ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**))
,! 5 (∀E: P36) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**R** ∩ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R ∩ P) ⇒ S ≡ (R ∩ Q))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **44.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P ∩ R) ≡ S ⇒ (Q ∩ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P39) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & (**P** ∩ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** ∩ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P ∩ R) ≡ S ⇒ (Q ∩ R) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **45.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∩ **R**))
,! 5 (∀E: P38) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∩ **R**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**Q** ∩ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∩ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**P** ∩ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** ∩ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P ∩ R) ⇒ S ≡ (Q ∩ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **46.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P39) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∩ **Q**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

Q ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & (**R** ∩ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R ∩ P) ≡ S ⇒ (R ∩ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **47.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (R ∩ P) ⇒ S ≡ (R ∩ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**))
,! 5 (∀E: P38) ¡

R ≡ **R** & **Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**R** ∩ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ (**R** ∩ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** ∩ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (R ∩ P) ⇒ S ≡ (R ∩ Q))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! The next three propositions (P48-P50) concern the Associative Laws of Intersection. ¡

! **48. Associative Law of Intersection Around Inclusion n1.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 2 (∀E: P10) ¡

((P ∩ Q) ⊆ P ⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P) ,! 3 (∀E: P21) ¡

(P ∩ Q) ⊆ P ⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P ,! 4 (()E: 3) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(P ∩ Q) ⊆ Q ,! 6 (∀E: P11) ¡

((P ∩ Q) ⊆ Q ⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R))
,! 7 (∀E: P31) ¡

(P ∩ Q) ⊆ Q ⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)
,! 8 (()E: 7) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P & ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)
,! 10 (&I: 5,9) ¡

(((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P & ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)
⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R)))
,! 11 (∀E: P12) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ P & ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (Q ∩ R)
⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R))
,! 12 (()E: 11) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R)) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 49. Associative Law of Intersection Around Inclusion n2. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

(Q ∩ R) ⊆ Q ,! 2 (∀E: P10) ¡

((Q ∩ R) ⊆ Q ⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q))
,! 3 (∀E: P32) ¡

(Q ∩ R) ⊆ Q ⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q)
,! 4 (()E: 3) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(Q ∩ R) ⊆ R ,! 6 (∀E: P11) ¡

((Q ∩ R) ⊆ R ⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R) ,! 7 (∀E: P22) ¡

(Q ∩ R) ⊆ R ⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R ,! 8 (()E: 7) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q) & (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R
,! 10 (&I: 5,9) ¡

((P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q) & (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R
⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R))
,! 11 (∀E: P12) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ (P ∩ Q) & (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ R
⇒ (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R)
,! 12 (()E: 11) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **50. Associative Law of Intersection Around Equivalence.**
¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∩ R) ≡ (P ∩ (Q ∩ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R)) ,! 2 (∀E: P48) ¡

(P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R) ,! 3 (∀E: P49) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R))
& (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R))
& (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R)
⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ≡ (P ∩ (Q ∩ R)))
,! 5 (∀E C1.8) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ⊆ (P ∩ (Q ∩ R))
& (P ∩ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∩ R)
⇒ ((P ∩ Q) ∩ R) ≡ (P ∩ (Q ∩ R))
,! 6 (()E: 5) ¡

((P ∩ Q) ∩ R) ≡ (P ∩ (Q ∩ R)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∩ R) ≡ (P ∩ (Q ∩ R)) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! The final propositions of this chapter (P51-P58) are about the

Distributive Laws for Intersections and Unions. ¡

! **51. Distributive Law of Intersections and Unions Around Inclusion, n1.** Remark that the proof returns to first principles, and appeals to P3 and C2.3. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∪ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

x ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))[**x**] ⇒ **P**[**x**] & (**Q** ∪ **R**)[**x**])
,! 4 (∀E: P3) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))[**x**] ⇒ **P**[**x**] & (**Q** ∪ **R**)[**x**]
,! 5 (()E: 4) ¡

P[**x**] & (**Q** ∪ **R**)[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

P[**x**] ,! 7 (&E: 6) ¡

(**Q** ∪ **R**)[**x**] ,! 8 (&E: 6) ¡

((**Q** ∪ **R**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ∨ **R**[**x**]) ,! 9 (∀E: C2.3) ¡

(**Q** ∪ **R**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ∨ **R**[**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

Q[**x**] ∨ **R**[**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q[**x**] ,! 12 (Prem) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 13 (&I: 7,12) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∩ **Q**)[**x**]) ,! 14 (∀E: P4) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 15 (()E: 14) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ,! 17 (∀E C2.12) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
,! 18 (&I: 16,17) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))[**x**])
,! 19 (∀E: C1.2) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))[**x**]
,! 20 (()E: 19) ¡

((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

Q[x] ⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x] ,! 22 (⇒I: 12,21) ¡

R[x] ,! 23 (Prem) ¡

P[x] & R[x] ,! 24 (&I: 7,23) ¡

(P[x] & R[x] ⇒ (P ∩ R)[x]) ,! 25 (∀E: P4) ¡

P[x] & R[x] ⇒ (P ∩ R)[x] ,! 26 (()E: 25) ¡

(P ∩ R)[x] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

(P ∩ R) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ,! 28 (∀E: C2.13) ¡

(P ∩ R)[x] & (P ∩ R) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))
,! 29 (&I: 27,28) ¡

((P ∩ R)[x] & (P ∩ R) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))
⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x])
,! 30 (∀E C1.2) ¡

(P ∩ R)[x] & (P ∩ R) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))
⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x]
,! 31 (()E: 30) ¡

((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x] ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

R[x] ⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x] ,! 33 (⇒I: 23,32) ¡

((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x] ,! 34 (∨E: 11,22,33)
¡

(P ∩ (Q ∪ R))[x] ⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x]
,! 35 (⇒I: 3,34) ¡

((P ∩ (Q ∪ R))[x] ⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x])
,! 36 (()I: 35) ¡

∀x ((P ∩ (Q ∪ R))[x] ⇒ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))[x])
,! 37 (∀I: 2,36) ¡

(P ∩ (Q ∪ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ,! 38 (𝕊I: C1.1,37) ¡

∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∪ R)) ⊆ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))
! 39 (∀I: 1,38) ¡

▯

! 52. Distributive Law of Intersections and Unions Around Inclusion, n2. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ⊆ (P ∩ (Q ∪ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 2 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **P** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **P** ⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P**)
,! 5 (∀E: C2.14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **P** ⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P**
,! 6 (()E: 5) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** ,! 8 (∀E: P11) ¡

(**P** ∩ **R**) ⊆ **R** ,! 9 (∀E: P11) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **R** ,! 10 (&I: 8,9) ¡

((**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **R**
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**))
,! 11 (∀E: C2.32) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **Q** & (**P** ∩ **R**) ⊆ **R**
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**)
,! 12 (()E: 11) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P** & ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**)
,! 14 (&I: 7,13) ¡

(((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P** & ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**)
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)))
,! 15 (∀E: P12) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ **P** & ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**Q** ∪ **R**)
⇒ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))
,! 16 (()E: 15) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ⊆ (P ∩ (Q ∪ R))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! 53. Distributive Law of Intersections and Unions Around Equivalence, n1. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∪ R)) ≡ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ,! 2 (∀E: P51) ¡

((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ,! 3 (∀E: P52) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
& ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
& ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)))
,! 5 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
& ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q∀R (P ∩ (Q ∪ R)) ≡ ((P ∩ Q) ∪ (P ∩ R))
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! 54. Distributive Law of Intersections and Unions Around Equivalence, n2. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((P ∩ R) ∪ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∩ **R**) ≡ (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**)) ,! 2 (∀E: P14) ¡

(**R** ∩ (**P** ∪ **Q**)) ≡ ((**R** ∩ **P**) ∪ (**R** ∩ **Q**)) ,! 3 (∀E: P53) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∩ **R**) ≡ (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**))
& (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**)) ≡ ((**R** ∩ **P**) ∪ (**R** ∩ **Q**))
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((**P** ∪ **Q**) ∩ **R**) ≡ (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**))
& (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**)) ≡ ((**R** ∩ **P**) ∪ (**R** ∩ **Q**))
⇒ ((**P** ∪ **Q**) ∩ **R**) ≡ ((**R** ∩ **P**) ∪ (**R** ∩ **Q**)))
,! 5 (∀E: C1.8) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∩ **R**) ≡ (**R** ∩ (**P** ∪ **Q**))

& (R ∩ (P ∪ Q)) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
⇒ ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
,! 6 (()E: 5) ¡

((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(P ∩ R) ≡ (R ∩ P) ,! 8 (∀E: P14) ¡

(P ∩ R) ≡ (R ∩ P) & ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
,! 9 (&I: 7,8) ¡

(Q ∩ R) ≡ (R ∩ Q) ,! 10 (∀E: P14) ¡

(P ∩ R) ≡ (R ∩ P) & (Q ∩ R) ≡ (R ∩ Q)
& ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
,! 11 (&I: 9,10) ¡

((P ∩ R) ≡ (R ∩ P) & (Q ∩ R) ≡ (R ∩ Q)
& ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
⇒ ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((P ∩ R) ∪ (Q ∩ R)))
,! 12 (∀E: C2.42) ¡

(P ∩ R) ≡ (R ∩ P) & (Q ∩ R) ≡ (R ∩ Q)
& ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((R ∩ P) ∪ (R ∩ Q))
⇒ ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((P ∩ R) ∪ (Q ∩ R))
,! 13 (()E: 10) ¡

((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((P ∩ R) ∪ (Q ∩ R)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∩ R) ≡ ((P ∩ R) ∪ (Q ∩ R))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! 55. Distributive Law of Intersections and Unions Around Inclusion, n3. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (P ∪ Q) ,! 2 (∀E: P13) ¡

P ⊆ (P ∪ R) ,! 3 (∀E: P13) ¡

P ⊆ (P ∪ Q) & P ⊆ (P ∪ R) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(P ⊆ (P ∪ Q) & P ⊆ (P ∪ R) ⇒ P ⊆ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R)))
,! 5 (∀E: P12) ¡

P ⊆ (P ∪ Q) & P ⊆ (P ∪ R) ⇒ P ⊆ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R))
,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 8 (∀E: C2.13) ¡

R ⊆ (**P** ∪ **R**) ,! 9 (∀E: C2.13) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **R**) ,! 10 (&I: 8,9) ¡

(**Q** ⊆ (**P** ∪ **Q**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **R**)
⇒ (**Q** ∩ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)))
,! 11 (∀E: P30) ¡

Q ⊆ (**P** ∪ **Q**) & **R** ⊆ (**P** ∪ **R**)
⇒ (**Q** ∩ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))
,! 12 (()E: 11) ¡

(**Q** ∩ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

P ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) & (**Q** ∩ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))
,! 14 (&I: 7,13) ¡

(**P** ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) & (**Q** ∩ **R**) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∩ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)))
,! 15 (∀E: C2.14) ¡

P ⊆ (**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) & ((**Q** ∩ **R**) ⊆ (**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))
⇒ (**P** ∪ (**Q** ∩ **R**)) ⊆ ((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))
,! 16 (()E: 15) ¡

(**P** ∪ (**Q** ∩ **R**)) ⊆ (**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**)) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∩ R)) ⊆ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **56. Distributive Law of Intersections and Unions Around Inclusion, n4.** The proof returns to first principles, and appeals to P3 and C2.7. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R)) ⊆ (P ∪ (Q ∩ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

x ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) ∩ (**P** ∪ **R**))[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

(**P**[**x**] ∨ ¬ **P**[**x**]) ,! 4 (∀E: I3.15) ¡

P[**x**] ∨ ¬ **P**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

P[**x**] ,! 6 (Prem) ¡

P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ,! 7 (∨I: 6) ¡

P[x] ⇒ P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ,! 8 (⇒I: 6,7) ¡

¬ P[x] ,! 9 (Prem) ¡

(((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R))[x] ⇒ (P ∪ Q)[x] & (P ∪ R)[x])
,! 10 (∀E: P3) ¡

((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R))[x] ⇒ (P ∪ Q)[x] & (P ∪ R)[x]
,! 11 (()E: 10) ¡

(P ∪ Q)[x] & (P ∪ R)[x] ,! 12 (⇒E: 3,11) ¡

(P ∪ Q)[x] ,! 13 (&E: 12) ¡

(P ∪ R)[x] ,! 14 (&E: 13) ¡

(P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ,! 15 (&I: 9,13) ¡

((P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x]) ,! 16 (∀E: C2.7) ¡

(P ∪ Q)[x] & ¬ P[x] ⇒ Q[x] ,! 17 (()E: 16) ¡

Q[x] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(P ∪ R)[x] & ¬ P[x] ,! 19 (&I: 9,14) ¡

((P ∪ R)[x] & ¬ P[x] ⇒ R[x]) ,! 20 (∀E: C2.7) ¡

(P ∪ R)[x] & ¬ P[x] ⇒ R[x] ,! 21 (()E: 20) ¡

R[x] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

Q[x] & R[x] ,! 23 (&I: 18,22) ¡

(Q[x] & R[x] ⇒ (Q ∩ R)[x]) ,! 24 (∀E: P4) ¡

Q[x] & R[x] ⇒ (Q ∩ R)[x] ,! 25 (()E: 24) ¡

(Q ∩ R)[x] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ,! 27 (∨I: 26) ¡

¬ P[x] ⇒ P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ,! 28 (⇒I: 9,27) ¡

P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ,! 29 (∨E: 5,8,28) ¡

(P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ⇒ (P ∪ (Q ∩ R))[x])
,! 30 (∀E: C2.4) ¡

P[x] ∨ (Q ∩ R)[x] ⇒ (P ∪ (Q ∩ R))[x]
,! 31 (()E: 30) ¡

(P ∪ **(Q** ∩ **R))[x]** ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

((P ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))[x]** ⇒ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))[x]**
,! 33 (⇒I: 3,32) ¡

(**((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))[x]** ⇒ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))[x]**)
,! 34 (()I: 33) ¡

∀x (**((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**[x] ⇒ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))**[x])
,! 35 (∀I: 2,34) ¡

((P ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ⊆ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))** ,! 36 ($I: C1.1,35) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R)) ⊆ (P ∪ (Q ∩ R))
! 37 (∀I: 1,36) ¡

▯

! 57. Distributive Law of Intersections and Unions Around Equivalence, n3. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∩ R)) ≡ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

(P ∪ **(Q** ∩ **R))** ⊆ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ,! 2 (∀E: P55) ¡

((P ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ⊆ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))** ,! 3 (∀E: P56) ¡

(P ∪ **(Q** ∩ **R))** ⊆ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**
& **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ⊆ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))**
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**(P** ∪ **(Q** ∩ **R))** ⊆ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**
& **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ⊆ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))**
⇒ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))** ≡ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**)
,! 5 (∀E C1.8) ¡

(P ∪ **(Q** ∩ **R))** ⊆ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**
& **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ⊆ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))**
⇒ **(P** ∪ **(Q** ∩ **R))** ≡ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))**
,! 6 (()E: 5) ¡

(P ∪ **(Q** ∩ **R))** ≡ **((P** ∪ **Q)** ∩ **(P** ∪ **R))** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q∀R (P ∪ (Q ∩ R)) ≡ ((P ∪ Q) ∩ (P ∪ R))
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! 58. Distributive Law of Intersections and Unions Around

Equivalence, n4. ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

((P ∩ Q) ∪ R) ≡ (R ∪ (P ∩ Q)) ,! 2 (∀E C2.16) ¡

(R ∪ (P ∩ Q)) ≡ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ,! 3 (∀E: P57) ¡

((P ∩ Q) ∪ R) ≡ (R ∪ (P ∩ Q))
& (R ∪ (P ∩ Q)) ≡ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q))
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ∪ P) ≡ (P ∪ R) ,! 5 (∀E C2.16) ¡

(R ∪ Q) ≡ (Q ∪ R) ,! 6 (∀E C2.16) ¡

(R ∪ P) ≡ (P ∪ R) & (R ∪ Q) ≡ (Q ∪ R) ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((R ∪ P) ≡ (P ∪ R) & (R ∪ Q) ≡ (Q ∪ R)
⇒ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R)))
,! 8 (∀E: P33) ¡

(R ∪ P) ≡ (P ∪ R) & (R ∪ Q) ≡ (Q ∪ R)
⇒ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
,! 9 (()E: 8) ¡

((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((P ∩ Q) ∪ R) ≡ (R ∪ (P ∩ Q))
& (R ∪ (P ∩ Q)) ≡ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q))
& ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
,! 11 (&I: 4,10) ¡

(((P ∩ Q) ∪ R) ≡ (R ∪ (P ∩ Q))
& (R ∪ (P ∩ Q)) ≡ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q))
& ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
⇒ ((P ∩ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R)))
,! 12 (∀E: C1.21) ¡

((P ∩ Q) ∪ R) ≡ (R ∪ (P ∩ Q))
& (R ∪ (P ∩ Q)) ≡ ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q))
& ((R ∪ P) ∩ (R ∪ Q)) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
⇒ ((P ∩ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))
,! 13 (()E: 12) ¡

((P ∩ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) ∩ (Q ∪ R))