

## ! CHAPTER 4

### COMPLEMENTS ;

! The purpose of this chapter is to introduce the complement of a predicate, i.e. those things which do not satisfy it.  $(P^C)$  is satisfied by precisely those things which do not satisfy  $P$ . ;

! 1.  $^C$  represents complement (for one-place predicates). ;

$\mathbb{D} \ ^C ; (P^C) ; ; \{a : \neg P[a]\}$  ;

! 2. **Fundamental Proposition of Complements.** The definition in P1 is only used in this chapter to prove this fundamental proposition. In turn, P2 is only used in the proofs of P3 and P4. ;

$\vdash \forall P \forall x ( (P^C)[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ;

$P$  ,! 1 (Prem) ;

$\forall x ( \{a : \neg P[a]\}[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ,! 2 (Pred) ;

$\forall x ( (P)^C[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ,! 3 ( $\mathbb{D}I$ : P1,2) ;

$\forall P \forall x ( (P^C)[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ! 4 ( $\forall I$ ) ;

$\square$

! 3. **Fundamental Proposition of Complements, First Half.** ;

$\vdash \forall P \forall x ( (P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x] )$  ;

$P, x$  ,! 1 (Prem) ;

$( (P)^C[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ,! 2 ( $\forall E$ : P2) ;

$(P)^C[x] \Leftrightarrow \neg P[x]$  ,! 3 ( $(\Leftrightarrow)E$ : 2) ;

$(P)^C[x] \Rightarrow \neg P[x]$  ,! 4 ( $(\Leftrightarrow)E$ : 3) ;

$( (P)^C[x] \Rightarrow \neg P[x] )$  ,! 5 ( $(\Rightarrow)I$ : 4) ;

$\forall P \forall x ( (P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x] )$  ! 6 ( $\forall I$ : 1,5) ;

$\square$

! 4. **Fundamental Proposition of Complements, Second Half.** ;

$\vdash \forall P \forall x ( \neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x] )$  ;

$P, x$  ,! 1 (Prem) ;

$( (P)^C[x] \Leftrightarrow \neg P[x] )$  ,! 2 ( $\forall E$ : P2) ;

$(P)^C[x] \Leftrightarrow \neg P[x]$	,! 3 ((E: 2)	i
$\neg P[x] \Rightarrow (P)^C[x]$	,! 4 ( $\Leftrightarrow$ E: 3)	i
$(\neg P[x] \Rightarrow (P)^C[x])$	,! 5 ((I: 4)	i
$\forall P \forall x (\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x])$	! 6 ( $\forall$ I: 1,5)	i
$\square$		i

! 5. P5 is the contrapositive of P3.

$\vdash \forall P \forall x (P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x])$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$P[x]$	,! 2 (Prem)	i
$(P^C)[x]$	,! 3 (Prem)	i
$( (P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x] )$	,! 4 ( $\forall$ E: P3)	i
$(P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x]$	,! 5 ((E: 4)	i
$\neg P[x]$	,! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$\mathfrak{F}$	,! 7 ( $\mathfrak{F}$ I: 2,6)	i
$(P^C)[x] \Rightarrow \mathfrak{F}$	,! 8 ( $\Rightarrow$ I: 3,7)	i
$\neg (P^C)[x]$	,! 9 ( $\neg$ I: 8)	i
$P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x]$	,! 10 ( $\Rightarrow$ I: 2,9)	i
$( P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x] )$	,! 11 ((I: 10)	i
$\forall P \forall x ( P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x] )$	! 12 ( $\forall$ I: 1,11)	i
$\square$		

! 6. P6 is the contrapositive of P4. The proof given is structurally the same as P5's, but with one additional step to remove a double negation (Step 9).

$\vdash \forall P \forall x (\neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x])$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$\neg (P^C)[x]$	,! 2 (Prem)	i
$\neg P[x]$	,! 3 (Prem)	i
$(\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x])$	,! 4 ( $\forall$ E: P4)	i

$\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x]$	,! 5 ((E: 4)	i
$(P^C)[x]$	,! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$\mathfrak{F}$	,! 7 ( $\mathfrak{F}$ I: 2,6)	i
$\neg P[x] \Rightarrow \mathfrak{F}$	,! 8 ( $\Rightarrow$ I: 3,7)	i
$\neg\neg P[x]$	,! 9 ( $\neg$ I: 8)	i
$P[x]$	,! 10 ( $\neg$ E: 9)	i
$\neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x]$	,! 11 ( $\Rightarrow$ I: 2,10)	i
$( \neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	,! 12 ((I: 11)	i
$\forall P \forall x ( \neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	! 13 ( $\forall$ I: 1,12)	i

□

! 7. P7 is the contrapositive of the Fundamental Proposition (P2).

$\vdash \forall P \forall x ( \neg (P^C)[x] \Leftrightarrow P[x] )$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$( P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x] )$	,! 2 ( $\forall$ E: P5)	i
$P[x] \Rightarrow \neg (P^C)[x]$	,! 3 ((E: 2)	i
$( \neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	,! 4 ( $\forall$ E: P6)	i
$\neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x]$	,! 5 ((E: 4)	i
$P[x] \Leftrightarrow \neg (P^C)[x]$	,! 6 ( $\Leftrightarrow$ I: 3,5)	i
$( P[x] \Leftrightarrow \neg (P^C)[x] )$	,! 7 ((I: 6)	i
$\forall P \forall x ( \neg (P^C)[x] \Leftrightarrow P[x] )$	! 8 ( $\forall$ I: 1,7)	i

□

! 8. The Law of Non-Contradiction: Complement Form.

$\vdash \forall P \forall x \neg (P[x] \& (P^C)[x])$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$( P[x] \& (P^C)[x] )$	,! 2 (Prem)	i
$P[x] \& (P^C)[x]$	,! 3 ((E: 2)	i
$P[x]$	,! 4 ( $\&$ E: 3)	i

$(P^C)[x]$	,! 5 (&E: 3)	i
$( (P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x] )$	,! 6 ( $\forall$ E: P3)	i
$(P^C)[x] \Rightarrow \neg P[x]$	,! 7 (( )E: 6)	i
$\neg P[x]$	,! 8 ( $\Rightarrow$ E: 5,7)	i
$\mathfrak{F}$	,! 9 ( $\mathfrak{F}$ I: 4,8)	i
$(P[x] \& (P^C)[x]) \Rightarrow \mathfrak{F}$	,! 10 ( $\Rightarrow$ I: 2,9)	i
$\neg (P[x] \& (P^C)[x])$	,! 11 ( $\neg$ I: 10)	i
$\forall P \forall x \neg (P[x] \& (P^C)[x])$	! 12 ( $\forall$ I: 1,11)	i

□

**! 9. The Law of Non-Contradiction: Complement and Intersection Form.**

$\vdash \forall P \forall x \neg (P \cap (P^C))[x]$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$(P \cap (P^C))[x]$	,! 2 (Prem)	i
$( (P \cap (P^C))[x] \Rightarrow P[x] \& (P^C)[x] )$	,! 3 ( $\forall$ E C3.3)	i
$(P \cap (P^C))[x] \Rightarrow P[x] \& (P^C)[x]$	,! 4 (( )E: 3)	i
$P[x] \& (P^C)[x]$	,! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$(P[x] \& (P^C)[x])$	,! 6 (( )I: 5)	i
$\neg (P[x] \& (P^C)[x])$	,! 7 ( $\forall$ E: P8)	i
$\mathfrak{F}$	,! 8 ( $\mathfrak{F}$ I: 6,7)	i
$(P \cap (P^C))[x] \Rightarrow \mathfrak{F}$	,! 9 ( $\Rightarrow$ I: 2,8)	i
$\neg (P \cap (P^C))[x]$	,! 10 ( $\neg$ I: 9)	i
$\forall P \forall x \neg (P \cap (P^C))[x]$	! 11 ( $\forall$ I: 1,10)	i

□

**! 10. The Law of the Excluded Middle: Complement Form.**

$\vdash \forall P \forall x ( P[x] \vee (P^C)[x] )$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$( P[x] \vee \neg P[x] )$	,! 2 ( $\forall$ E: I3.15)	i

$P[x] \vee \neg P[x]$	,! 3 ((E: 2)	i
$P[x]$	,! 4 (Prem)	i
$P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 5 ( $\vee$ I: 4)	i
$P[x] \Rightarrow P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 6 ( $\Rightarrow$ I: 4,5)	i
$\neg P[x]$	,! 7 (Prem)	i
$(\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x])$	,! 8 ( $\forall$ E: P4)	i
$\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x]$	,! 9 ((E: 8)	i
$(P^C)[x]$	,! 10 ( $\Rightarrow$ E: 7,9)	i
$P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 11 ( $\vee$ I: 10)	i
$\neg P[x] \Rightarrow P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 12 ( $\Rightarrow$ I: 7,11)	i
$P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 13 ( $\vee$ E: 3,6,12)	i
$(P[x] \vee (P^C)[x])$	,! 14 ((I: 13)	i
$\forall P \forall x (P[x] \vee (P^C)[x])$	! 15 ( $\forall$ I: 1,14)	i

□

**! 11. The Law of Excluded Middle: Complement and Union Form.**

$\vdash \forall P \forall x (P \cup (P^C))[x]$		i
$P, x$	,! 1 (Prem)	i
$(P[x] \vee (P^C)[x])$	,! 2 ( $\forall$ E: P10)	i
$P[x] \vee (P^C)[x]$	,! 3 ((E: 2)	i
$(P[x] \vee (P^C)[x] \Rightarrow (P \cup (P^C))[x])$	,! 4 ( $\forall$ E: C2.4)	i
$P[x] \vee (P^C)[x] \Rightarrow (P \cup (P^C))[x]$	,! 5 ((E: 5)	i
$(P \cup (P^C))[x]$	,! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$\forall P \forall x (P \cup (P^C))[x]$	! 7 ( $\forall$ I: 1,6)	i

□

! P12 and P13 are the only propositions appealed to in subsequent proofs of this chapter. P12 appeals to P3, and P13 to P4.

**! 12.**

$\vdash \forall P \forall Q ( (P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P )$		i
$P, Q$	,! 1 (Prem)	i
$(P^C) \subseteq Q$	,! 2 (Prem)	i
$x$	,! 3 (Prem)	i
$(Q^C)[x]$	,! 4 (Prem)	i
$( (Q^C)[x] \Rightarrow \neg Q[x] )$	,! 5 ( $\forall E$ : P3)	i
$(Q^C)[x] \Rightarrow \neg Q[x]$	,! 6 ( $(\Rightarrow)E$ : 5)	i
$\neg Q[x]$	,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6)	i
$\neg Q[x] \ \& \ (P^C) \subseteq Q$	,! 8 ( $\&I$ : 2,7)	i
$( \neg Q[x] \ \& \ (P^C) \subseteq Q \Rightarrow \neg (P^C)[x] )$	,! 9 ( $\forall E$ : C1.3)	i
$\neg Q[x] \ \& \ (P^C) \subseteq Q \Rightarrow \neg (P^C)[x]$	,! 10 ( $(\Rightarrow)E$ : 9)	i
$\neg (P^C)[x]$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10)	i
$( \neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	,! 12 ( $\forall E$ : P6)	i
$\neg (P^C)[x] \Rightarrow P[x]$	,! 13 ( $(\Rightarrow)E$ : 12)	i
$P[x]$	,! 14 ( $\Rightarrow E$ : 11,13)	i
$(Q^C)[x] \Rightarrow P[x]$	,! 15 ( $\Rightarrow I$ : 4,14)	i
$( (Q^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	,! 16 ( $(\Rightarrow)I$ : 15)	i
$\forall x ( (Q^C)[x] \Rightarrow P[x] )$	,! 17 ( $\forall I$ : 3,16)	i
$(Q^C) \subseteq P$	,! 18 ( $\S I$ : C1.1,17)	i
$(P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P$	,! 19 ( $\Rightarrow I$ : 2,18)	i
$( (P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P )$	,! 20 ( $(\Rightarrow)I$ : 19)	i
$\forall P \forall Q ( (P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P )$	! 21 ( $\forall I$ : 1,20)	i

□

! 13. i

$\vdash \forall P \forall Q ( P \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq (P^C) )$  i

$P, Q$  ,! 1 (Prem) i

$P \subseteq (Q^C)$	,! 2 (Prem)	i
$x$	,! 3 (Prem)	i
$Q[x]$	,! 4 (Prem)	i
$( Q[x] \Rightarrow \neg (Q^C)[x] )$	,! 5 ( $\forall E$ : P5)	i
$Q[x] \Rightarrow \neg (Q^C)[x]$	,! 6 ( $(\Rightarrow E)$ : 5)	i
$\neg (Q^C)[x]$	,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6)	i
$\neg (Q^C)[x] \ \& \ P \subseteq (Q^C)$	,! 8 ( $\&I$ : 2,7)	i
$( \neg (Q^C)[x] \ \& \ P \subseteq (Q^C) \Rightarrow \neg P[x] )$	,! 9 ( $\forall E$ : C1.3)	i
$\neg (Q^C)[x] \ \& \ P \subseteq (Q^C) \Rightarrow \neg P[x]$	,! 10 ( $(\Rightarrow E)$ : 9)	i
$\neg P[x]$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10)	i
$( \neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x] )$	,! 12 ( $\forall E$ : P4)	i
$\neg P[x] \Rightarrow (P^C)[x]$	,! 13 ( $(\Rightarrow E)$ : 12)	i
$(P^C)[x]$	,! 14 ( $\Rightarrow E$ : 11,13)	i
$Q[x] \Rightarrow (P^C)[x]$	,! 15 ( $\Rightarrow I$ : 4,14)	i
$( Q[x] \Rightarrow (P^C)[x] )$	,! 16 ( $(\Rightarrow I)$ : 15)	i
$\forall x ( Q[x] \Rightarrow (P^C)[x] )$	,! 17 ( $\forall I$ : 3,15)	i
$Q \subseteq (P^C)$	,! 18 ( $\S I$ : C1.1,17)	i
$P \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq (P^C)$	,! 19 ( $\Rightarrow I$ : 2,18)	i
$( P \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq (P^C) )$	,! 20 ( $(\Rightarrow I)$ : 19)	i
$\forall P \forall Q ( P \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq (P^C) )$	! 21 ( $\forall I$ : 1,20)	i

□

! P14-P17 are various permutations on the same theme, and are corollaries of P12 and P13. i

! 14. i

$\vdash \forall P \forall Q ( (P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$  i

$P, Q$  ,! 1 (Prem) i

$(P^C) \equiv Q$	,! 2 (Prem)	i
$( (P^C) \equiv Q \Rightarrow (P^C) \subseteq Q \ \& \ Q \subseteq (P^C) )$	,! 3 ( $\forall E$ : C1.13)	i
$(P^C) \equiv Q \Rightarrow (P^C) \subseteq Q \ \& \ Q \subseteq (P^C)$	,! 4 ( $( )E$ : 3)	i
$(P^C) \subseteq Q \ \& \ Q \subseteq (P^C)$	,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4)	i
$(P^C) \subseteq Q$	,! 6 ( $\&E$ : 5)	i
$( (P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P )$	,! 7 ( $\forall E$ : P12)	i
$(P^C) \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq P$	,! 8 ( $( )E$ : 7)	i
$(Q^C) \subseteq P$	,! 9 ( $\Rightarrow E$ : 6,8)	i
$Q \subseteq (P^C)$	,! 10 ( $\&E$ : 5)	i
$( Q \subseteq (P^C) \Rightarrow P \subseteq (Q^C) )$	,! 11 ( $\forall E$ : P13)	i
$Q \subseteq (P^C) \Rightarrow P \subseteq (Q^C)$	,! 12 ( $( )E$ : 11)	i
$P \subseteq (Q^C)$	,! 13 ( $\Rightarrow E$ : 10,12)	i
$(Q^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq (Q^C)$	,! 14 ( $\&I$ : 10,13)	i
$( (Q^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq (Q^C) \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$	,! 15 ( $\forall E$ : C1.8)	i
$(Q^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq (Q^C) \Rightarrow (Q^C) \equiv P$	,! 16 ( $( )E$ : 15)	i
$(Q^C) \equiv P$	,! 17 ( $\Rightarrow E$ : 14,16)	i
$(P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P$	,! 18 ( $\Rightarrow I$ : 2,17)	i
$( (P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$	,! 19 ( $( )I$ : 18)	i
$\forall P \forall Q ( (P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$	! 20 ( $\forall I$ : 1,19)	i

□

! 15.

$\vdash \forall P \forall Q ( (P^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv (Q^C) )$		i
$P, Q$	,! 1 (Prem)	i
$(P^C) \equiv Q$	,! 2 (Prem)	i
$( (P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$	,! 3 ( $\forall E$ : P14)	i
$(P^C) \equiv Q \Rightarrow (Q^C) \equiv P$	,! 4 ( $( )E$ : 3)	i

$(Q^C) \equiv P$	, ! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$( (Q^C) \equiv P \Rightarrow P \equiv (Q^C) )$	, ! 6 ( $\forall$ E: C1.10)	i
$(Q^C) \equiv P \Rightarrow P \equiv (Q^C)$	, ! 7 ( $($ )E: 6)	i
$P \equiv (Q^C)$	, ! 8 ( $\Rightarrow$ E: 5,7)	i
$(P^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv (Q^C)$	, ! 9 ( $\Rightarrow$ I: 2,8)	i
$( (P^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv (Q^C) )$	, ! 10 ( $($ )I: 9)	i
$\forall P \forall Q ( (P^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv (Q^C) )$	! 11 ( $\forall$ I: 1,10)	i

□

! 16. i

$\vdash \forall P \forall Q ( P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C) )$		i
$P, Q$	, ! 1 (Prem)	i
$P \equiv (Q^C)$	, ! 2 (Prem)	i
$( P \equiv (Q^C) \Rightarrow (Q^C) \equiv P )$	, ! 3 ( $\forall$ E: C1.10)	i
$P \equiv (Q^C) \Rightarrow (Q^C) \equiv P$	, ! 4 ( $($ )E: 3)	i
$(Q^C) \equiv P$	, ! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$( (Q^C) \equiv P \Rightarrow Q \equiv (P^C) )$	, ! 6 ( $\forall$ E: P15)	i
$(Q^C) \equiv P \Rightarrow Q \equiv (P^C)$	, ! 7 ( $($ )E: 6)	i
$Q \equiv (P^C)$	, ! 8 ( $\Rightarrow$ E: 5,7)	i
$P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C)$	, ! 9 ( $\Rightarrow$ I: 2,8)	i
$( P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C) )$	, ! 10 ( $($ )I: 9)	i
$\forall P \forall Q ( P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C) )$	! 11 ( $\forall$ I: 1,10)	i

□

! 17. The proof has the same structure as P15's. i

$\vdash \forall P \forall Q ( P \equiv (Q^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q )$		i
$P, Q$	, ! 1 (Prem)	i
$P \equiv (Q^C)$	, ! 2 (Prem)	i
$( P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C) )$	, ! 3 ( $\forall$ E: P16)	i

$P \equiv (Q^C) \Rightarrow Q \equiv (P^C)$	, ! 4 ((E): 3)	i
$Q \equiv (P^C)$	, ! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$( Q \equiv (P^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q )$	, ! 6 ( $\forall$ E: C1.10)	i
$Q \equiv (P^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q$	, ! 7 ((E): 6)	i
$(P^C) \equiv Q$	, ! 8 ( $\Rightarrow$ E: 5,7)	i
$P \equiv (Q^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q$	, ! 9 ( $\Rightarrow$ I: 2,8)	i
$( P \equiv (Q^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q )$	, ! 10 ((I): 9)	i
$\forall P \forall Q ( P \equiv (Q^C) \Rightarrow (P^C) \equiv Q )$	! 11 ( $\forall$ I: 1,10)	i

□

! Part of the reason for the chosen development for this chapter (proving P12 and P13 first) is that it permits the following slick proofs for P18 and P19. i

! 18. i

$\vdash \forall P ((P^C)^C) \subseteq P$		
$P$	, ! 1 (Prem)	i
$(P^C) \subseteq (P^C)$	, ! 2 ( $\forall$ E: C1.4)	i
$( (P^C) \subseteq (P^C) \Rightarrow ((P^C)^C) \subseteq P )$	, ! 3 ( $\forall$ E: P12)	i
$(P^C) \subseteq (P^C) \Rightarrow ((P^C)^C) \subseteq P$	, ! 4 ((E): 3)	i
$((P^C)^C) \subseteq P$	, ! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$\forall P ((P^C)^C) \subseteq P$	! 6 ( $\forall$ I: 1,5)	i

□

! 19. i

$\vdash \forall P P \subseteq ((P^C)^C)$		
$P$	, ! 1 (Prem)	i
$(P^C) \subseteq (P^C)$	, ! 2 ( $\forall$ E: C1.4)	i
$( (P^C) \subseteq (P^C) \Rightarrow P \subseteq ((P^C)^C) )$	, ! 3 ( $\forall$ E: P13)	i
$(P^C) \subseteq (P^C) \Rightarrow P \subseteq ((P^C)^C)$	, ! 4 ((E): 3)	i
$P \subseteq ((P^C)^C)$	, ! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i

$\forall P P \subseteq ((P^C)^C)$  ! 6 ( $\forall I$ : 1,5) ;

□

! 20. **Bipotency of Complements (Relative to Equivalence).**  
 There is a slick proof for P20, akin to that given for P18 and P19, which also has six steps. The following proof takes eight, but is better motivated, in that it appeals to P18 and P19 rather than to P17. ;

$\vdash \forall P ((P^C)^C) \equiv P$  ;

$P$  ,! 1 (Prem) ;

$((P^C)^C) \subseteq P$  ,! 2 ( $\forall E$ : P18) ;

$P \subseteq ((P^C)^C)$  ,! 3 ( $\forall E$ : P19) ;

$((P^C)^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq ((P^C)^C)$  ,! 4 ( $\&I$ : 2,3) ;

$( ((P^C)^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq ((P^C)^C) \Rightarrow ((P^C)^C) \equiv P )$   
 ,! 5 ( $\forall E$  C1.8) ;

$((P^C)^C) \subseteq P \ \& \ P \subseteq ((P^C)^C) \Rightarrow ((P^C)^C) \equiv P$   
 ,! 6 ( $()E$ : 5) ;

$((P^C)^C) \equiv P$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) ;

$\forall P ((P^C)^C) \equiv P$  ! 8 ( $\forall I$ : 1,7) ;

□

! P21-P22 state that complements inverse inclusion, i.e. taking complements of both sides of an inclusion reverses the sense of the inclusion. ;

! 21. ;

$\vdash \forall P \forall Q ( P \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C) )$  ;

$P, Q$  ,! 1 (Prem) ;

$P \subseteq Q$  ,! 2 (Prem) ;

$((Q^C)^C) \equiv Q$  ,! 3 ( $\forall E$ : P20) ;

$((Q^C)^C) \equiv Q \ \& \ P \subseteq Q$  ,! 4 ( $\&I$ : 2,3) ;

$( ((Q^C)^C) \equiv Q \ \& \ P \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq ((Q^C)^C) )$   
 ,! 5 ( $\forall E$ : C1.31) ;

$((Q^C)^C) \equiv Q \ \& \ P \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq ((Q^C)^C)$  ,! 6 ( $()E$ : 5) ;

$P \subseteq ((Q^C)^C)$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) ;

$( P \subseteq ((Q^C)^C) \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C) )$  ,! 8 ( $\forall E$ : P13) ;  
 $P \subseteq ((Q^C)^C) \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C)$  ,! 9 ( $()E$ : 8) ;  
 $(Q^C) \subseteq (P^C)$  ,! 10 ( $\Rightarrow E$ : 7,9) ;  
 $P \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C)$  ,! 11 ( $\Rightarrow I$ : 2,10) ;  
 $( P \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C) )$  ,! 12 ( $()I$ : 11) ;  
 $\forall P \forall Q ( P \subseteq Q \Rightarrow (Q^C) \subseteq (P^C) )$  ! 13 ( $\forall I$ : 1,12) ;

□

! 22. There is an alternative proof to the one given below, essentially a copy of P21's, which is shorter by two steps. ;

$\vdash \forall P \forall Q ( (P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq P )$  ;  
 $P, Q$  ,! 1 (Prem) ;  
 $(P^C) \subseteq (Q^C)$  ,! 2 (Prem) ;  
 $( (P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C) )$  ,! 3 ( $\forall E$ : P21) ;  
 $(P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C)$  ,! 4 ( $()E$ : 3) ;  
 $((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C)$  ,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) ;  
 $Q \subseteq ((Q^C)^C)$  ,! 6 ( $\forall E$ : P19) ;  
 $Q \subseteq ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C)$  ,! 7 ( $\&I$ : 5,6) ;  
 $((P^C)^C) \subseteq P$  ,! 8 ( $\forall E$ : P18) ;  
 $Q \subseteq ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C) \ \& \ ((P^C)^C) \subseteq P$  ,! 9 ( $\&I$ : 7,8) ;  
 $( Q \subseteq ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C) \ \& \ ((P^C)^C) \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P )$  ,! 10 ( $\forall E$ : C1.21) ;  
 $Q \subseteq ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \subseteq ((P^C)^C) \ \& \ ((P^C)^C) \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P$  ,! 11 ( $()E$ : 10) ;  
 $Q \subseteq P$  ,! 12 ( $\Rightarrow E$ : 9,11) ;  
 $(P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq P$  ,! 13 ( $\Rightarrow I$ : 2,12) ;  
 $( (P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq P )$  ,! 14 ( $()I$ : 13) ;  
 $\forall P \forall Q ( (P^C) \subseteq (Q^C) \Rightarrow Q \subseteq P )$  ! 15 ( $\forall I$ : 1,14) ;

□

! P23 to P25 assert that complements maintain equivalence. i

! 23. There is a proof which appeals to P21, which takes 20 steps. A shorter, more elegant proof, which shares the structure of P21's proof, is instead given. i

⊢  $\forall P \forall Q ( P \equiv Q \Rightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  i

**P, Q** ,! 1 (Prem) i

**P ≡ Q** ,! 2 (Prem) i

**((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ Q** ,! 3 (∀E: P20) i

**((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ Q & P ≡ Q** ,! 4 (&I: 2,3) i

**( ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ Q & P ≡ Q ⇒ ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P )** ,! 5 (∀E: C1.17) i

**((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ Q & P ≡ Q ⇒ ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P** ,! 6 ((E): 5) i

**((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P** ,! 7 (⇒E: 4,6) i

**( ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P ⇒ (P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>) )** ,! 8 (∀E: P14) i

**((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P ⇒ (P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>)** ,! 9 ((E): 8) i

**(P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>)** ,! 10 (⇒E: 7,9) i

**P ≡ Q ⇒ (P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>)** ,! 11 (⇒I: 2,10) i

**( P ≡ Q ⇒ (P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>) )** ,! 12 ((I): 11) i

$\forall P \forall Q ( P \equiv Q \Rightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  ! 13 (∀I: 1,12) i

□

! 24. An alternative proof would have been to copy P23's (which would have saved a couple of steps). Instead, one like P22's is followed. i

⊢  $\forall P \forall Q ( (P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q )$  i

**P, Q** ,! 1 (Prem) i

**(P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>)** ,! 2 (Prem) i

**((P<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ P** ,! 3 (∀E: P20) i

**( (P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>) ⇒ ((P<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) )** ,! 4 (∀E: P23) i

**(P<sup>C</sup>) ≡ (Q<sup>C</sup>) ⇒ ((P<sup>C</sup>)<sup>C</sup>) ≡ ((Q<sup>C</sup>)<sup>C</sup>)** ,! 5 ((E): 4) i

$((P^C)^C) \equiv ((Q^C)^C)$  ,! 6 ( $\Rightarrow$ E: 2,5) i  
 $((P^C)^C) \equiv P \ \& \ ((P^C)^C) \equiv ((Q^C)^C)$  ,! 7 ( $\&$ I: 3,6) i  
 $((Q^C)^C) \equiv Q$  ,! 8 ( $\forall$ E: P20) i  
 $((P^C)^C) \equiv P \ \& \ ((P^C)^C) \equiv ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \equiv Q$   
, ! 9 ( $\&$ I: 7,8) i  
 $( ((P^C)^C) \equiv P \ \& \ ((P^C)^C) \equiv ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv Q )$   
, ! 10 ( $\forall$ E: C1.25) i  
 $((P^C)^C) \equiv P \ \& \ ((P^C)^C) \equiv ((Q^C)^C) \ \& \ ((Q^C)^C) \equiv Q \Rightarrow P \equiv Q$   
, ! 11 ( $($ )E: 10) i  
 $P \equiv Q$  ,! 12 ( $\Rightarrow$ E: 9,11) i  
 $(P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q$  ,! 13 ( $\Rightarrow$ I: 2,12) i  
 $( (P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q )$  ,! 14 ( $($ )I: 13) i  
 $\forall P \forall Q ( (P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q )$  ! 15 ( $\forall$ I: 1,14) i

□

! 25.

$\vdash \forall P \forall Q ( P \equiv Q \Leftrightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  i  
 $P, Q$  ,! 1 (Prem) i  
 $( P \equiv Q \Rightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  ,! 2 ( $\forall$ E: P23) i  
 $P \equiv Q \Rightarrow (P^C) \equiv (Q^C)$  ,! 3 ( $($ )E: 2) i  
 $( (P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q )$  ,! 4 ( $\forall$ E: P24) i  
 $(P^C) \equiv (Q^C) \Rightarrow P \equiv Q$  ,! 5 ( $($ )E: 4) i  
 $P \equiv Q \Leftrightarrow (P^C) \equiv (Q^C)$  ,! 6 ( $\Leftrightarrow$ I: 3,5) i  
 $( P \equiv Q \Leftrightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  ,! 7 ( $($ )I: 6) i  
 $\forall P \forall Q ( P \equiv Q \Leftrightarrow (P^C) \equiv (Q^C) )$  ! 8 ( $\forall$ I: 1,7) i

□

**! 26. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n1, First Half.** A return to first principles, i.e. using one of the propositions P2 through P7, provides one possible proof, which is 30 steps long. This is avoided, but at the cost of a less perspicacious proof. i

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cap Q)^c \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)))$  i

$P, Q$  , ! 1 (Prem) i

$(P^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c))$  , ! 2 ( $\forall E$ : C2.12) i

$((P^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \Rightarrow (((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P)$  , ! 3 ( $\forall E$ : P12) i

$(P^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \Rightarrow (((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P$  , ! 4 ( $(\ )E$ : 3) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P$  , ! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) i

$(Q^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c))$  , ! 6 ( $\forall E$ : C2.13) i

$((Q^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \Rightarrow (((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q)$  , ! 7 ( $\forall E$ : P12) i

$(Q^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \Rightarrow (((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q$  , ! 8 ( $(\ )E$ : 7) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q$  , ! 9 ( $\Rightarrow E$ : 6,8) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q$  , ! 10 ( $\&I$ : 5,9) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q \Rightarrow$   
 $((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq (P \cap Q)$  , ! 11 ( $\forall E$ : C3.12) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq P \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq Q$   
 $\Rightarrow ((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq (P \cap Q)$  , ! 12 ( $(\ )E$ : 11) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq (P \cap Q)$  , ! 13 ( $\Rightarrow E$ : 10,12) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq (P \cap Q) \Rightarrow ((P \cap Q)^c \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)))$  , ! 14 ( $\forall E$ : P12) i

$((P^c) \cup (Q^c))^c \subseteq (P \cap Q) \Rightarrow ((P \cap Q)^c \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)))$  , ! 15 ( $(\ )E$ : 14) i

$((P \cap Q)^c \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)))$  , ! 16 ( $\Rightarrow E$ : 13,15) i

$\forall P \forall Q ((P \cap Q)^c \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)))$  ! 17 ( $\forall I$ : 1,16) i

□

! 27. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n1, Second Half i

$\vdash \forall P \forall Q ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  i  
 $P, Q$  , ! 1 (Prem) i  
 $(P \cap Q) \subseteq P$  , ! 2 ( $\forall E$ : C3.10) i  
 $((P \cap Q) \subseteq P \Rightarrow (P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c))$  , ! 3 ( $\forall E$ : P21) i  
 $(P \cap Q) \subseteq P \Rightarrow (P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 4 ( $(\Rightarrow E)$ : 3) i  
 $(P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) i  
 $(P \cap Q) \subseteq Q$  , ! 6 ( $\forall E$  C3.11) i  
 $((P \cap Q) \subseteq Q \Rightarrow (Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c))$  , ! 7 ( $\forall E$ : P21) i  
 $(P \cap Q) \subseteq Q \Rightarrow (Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 8 ( $(\Rightarrow E)$ : 7) i  
 $(Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 9 ( $\Rightarrow E$ : 6,8) i  
 $(P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c) \ \& \ (Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 10 ( $\&I$ : 5,9) i  
 $((P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c) \ \& \ (Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c) \Rightarrow ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 11 ( $\forall E$ : C2.14) i  
 $(P^c) \subseteq ((P \cap Q)^c) \ \& \ (Q^c) \subseteq ((P \cap Q)^c) \Rightarrow ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 12 ( $(\Rightarrow E)$ : 11) i  
 $((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 13 ( $\Rightarrow E$ : 10,12) i  
 $\forall P \forall Q ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  ! 14 ( $\forall I$ : 1,13) i

□

**! 28. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n1.** i

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cap Q)^c) \equiv ((P^c) \cup (Q^c))$  i  
 $P, Q$  , ! 1 (Prem) i  
 $((P \cap Q)^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c))$  , ! 2 ( $\forall E$ : P26) i  
 $((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 3 ( $\forall E$ : P27) i  
 $((P \cap Q)^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$  , ! 4 ( $\&I$ : 2,3) i  
 $((P \cap Q)^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c) \Rightarrow ((P \cap Q)^c) \equiv ((P^c) \cup (Q^c))$

,! 5 ( $\forall E$ : C1.8) i

$((P \cap Q)^c) \subseteq ((P^c) \cup (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cup (Q^c)) \subseteq ((P \cap Q)^c)$   
 $\Rightarrow ((P \cap Q)^c) \equiv ((P^c) \cup (Q^c))$

,! 6 ( $()E$ : 5) i

$((P \cap Q)^c) \equiv ((P^c) \cup (Q^c))$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) i

$\forall P \forall Q ((P \cap Q)^c) \equiv ((P^c) \cup (Q^c))$  ! 8 ( $\forall I$ : 1,7) i

□

**! 29. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n2, First Half** i

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  i

$P, Q$  ,! 1 (Prem) i

$P \subseteq (P \cup Q)$  ,! 2 ( $\forall E$  C2.12) i

$(P \subseteq (P \cup Q) \Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq (P^c))$  ,! 3 ( $\forall E$ : P21) i

$P \subseteq (P \cup Q) \Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq (P^c)$  ,! 4 ( $()E$ : 3) i

$((P \cup Q)^c) \subseteq (P^c)$  ,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) i

$Q \subseteq (P \cup Q)$  ,! 6 ( $\forall E$ : C2.13) i

$(Q \subseteq (P \cup Q) \Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c))$  ,! 7 ( $\forall E$ : P21) i

$Q \subseteq (P \cup Q) \Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c)$  ,! 8 ( $()E$ : 7) i

$((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c)$  ,! 9 ( $\Rightarrow E$ : 6,8) i

$((P \cup Q)^c) \subseteq (P^c) \ \& \ ((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c)$  ,! 10 ( $\&I$ : 5,9) i

$(( (P \cup Q)^c) \subseteq (P^c) \ \& \ ((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c))$   
 $\Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  ,! 11 ( $\forall E$ : C3.12) i

$((P \cup Q)^c) \subseteq (P^c) \ \& \ ((P \cup Q)^c) \subseteq (Q^c)$   
 $\Rightarrow ((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  ,! 12 ( $()E$ : 11) i

$((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  ,! 13 ( $\Rightarrow E$ : 10,12) i

$\forall P \forall Q ((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  ! 14 ( $\forall I$ : 1,13) i

□

**! 30. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n2, Second Half** i

$\vdash \forall P \forall Q ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$  i

$P, Q$  , ! 1 (Prem) i

$((P^c)^c) \equiv P$  , ! 2 ( $\forall E$ : P20) i

$((Q^c)^c) \equiv Q$  , ! 3 ( $\forall E$ : P20) i

$((P^c)^c) \equiv P \ \& \ ((Q^c)^c) \equiv Q$  , ! 4 ( $\&I$ : 2,3) i

$( ((P^c)^c) \equiv P \ \& \ ((Q^c)^c) \equiv Q$   
 $\Rightarrow ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$  , ! 5 ( $\forall E$ : C2.35) i

$((P^c)^c) \equiv P \ \& \ ((Q^c)^c) \equiv Q \Rightarrow ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$   
, ! 6 ( $()E$ : 5) i

$( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$  , ! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) i

$( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$   
, ! 8 ( $\forall E$ : P27) i

$( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$   
 $\& ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$   
, ! 9 ( $\&I$ : 7,8) i

$( ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$   
 $\ \& \ ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$   
 $\Rightarrow (P \cup Q) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$  , ! 10 ( $\forall E$ : C1.30) i

$( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \equiv (P \cup Q)$   
 $\& ( ((P^c)^c) \cup ((Q^c)^c) ) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$   
 $\Rightarrow (P \cup Q) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$  , ! 11 ( $()E$ : 10) i

$(P \cup Q) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$  , ! 12 ( $\Rightarrow E$ : 9,11) i

$( (P \cup Q) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c )$   
 $\Rightarrow ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$  , ! 13 ( $\forall E$ : P13) i

$(P \cup Q) \subseteq ( ((P^c) \cap (Q^c))^c ) \Rightarrow ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$   
, ! 14 ( $()E$ : 13) i

$((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$  , ! 15 ( $\Rightarrow E$ : 12,14) i

$\forall P \forall Q ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$  ! 16 ( $\forall I$ : 1,15) i

□

! 31. De Morgan's Law: Complement, Union, and Intersection Form, n2.

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cup Q)^c) \equiv ((P^c) \cap (Q^c))$

$P, Q$  ,! 1 (Prem)

$((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c))$  ,! 2 ( $\forall E$ : P29)

$((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$  ,! 3 ( $\forall E$ : P30)

$((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$   
 ,! 4 ( $\&I$ : 2,3)

$( ((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$   
 $\Rightarrow ((P \cup Q)^c) \equiv ((P^c) \cap (Q^c))$  )  
 ,! 5 ( $\forall E$  C1.8)

$((P \cup Q)^c) \subseteq ((P^c) \cap (Q^c)) \ \& \ ((P^c) \cap (Q^c)) \subseteq ((P \cup Q)^c)$   
 $\Rightarrow ((P \cup Q)^c) \equiv ((P^c) \cap (Q^c))$   
 ,! 6 ( $(\Rightarrow)E$ : 5)

$((P \cup Q)^c) \equiv ((P^c) \cap (Q^c))$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6)

$\forall P \forall Q ((P \cup Q)^c) \equiv ((P^c) \cap (Q^c))$  ! 8 ( $\forall I$ : 1,7)

□