!**CHAPTER 5**

AN EMPTY PREDICATE¡

! The purpose of this chapter is to introduce an empty predicate, ϕ, which is not satisfied by anything.

It has the following organization:

P1: definition
P2: assertion of the definition
P3-P4: fundamental proposition and corollary
P5-P18: propositions involving inclusion and equivalence (only)
P19-P22: propositions involving unions (and equvialence)
P23-P38: propositions involving intersections (and equivalence)
P39: proposition involving unions and intersections (and equivalence)
P40: propositions involving complements (and intersections, inclusion, and equivalence)

It is an important concept when two predicates (P and Q) share or do not share a common element. Since this is most easily expressed in terms of an intersection and an empty predicate, i.e. respectively $\neg\ (P \cap Q) \equiv \phi$ and $(P \cap Q) \equiv \phi$, there is a preponderant number of propositions in this chapter concerning intersection. ¡

! **1.** ϕ represents the predicate of non-identical things, which of course is empty (nothing satisfies it). ¡

$\mathbb{D}\ \ \phi\ ;\ \phi\ ;\ ;\ \{a : \neg\ a = a\}$ ¡

! **2.** P2 is used to prove P3, but subsequently is not used. ¡

$\vdash\ \forall x\ (\ \phi[x] \Leftrightarrow \neg\ x = x\ )$ ¡

$\forall x\ (\ \{a : \neg\ a = a\}[x] \Leftrightarrow \neg\ x = x\ )$,! 1 (Pred) ¡

$\forall x\ (\ \phi[x] \Leftrightarrow \neg\ x = x\ )$! 2 ($\mathbb{D}$I: P1,1) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Predicate of Non-Identical Things.** Subsequent to P3, P1 and P2 are not used. Thus, any empty predicate (which nothing satisfies) could be used to replace ϕ (the specificity of its defintion, as the predicate of non-identical things, is unimportant). ¡

$\vdash\ \forall x\ \neg\ \phi[x]$ ¡

$\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$\phi[\mathbf{x}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \phi[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{x}\ )$,! 3 ($\forall$E: P2) ¡

$\phi[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$,! 4 (()E: 3) ¡

$\phi[\mathbf{x}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$,! 5 ($\Leftrightarrow$E: 4) ¡

¬ **x** = **x** ,! 6 (⇒E: 5) ¡

x = **x** ,! 7 (=I) ¡

ℑ ,! 8 (ℑI: 6,7) ¡

ϕ[**x**] ⇒ ℑ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

¬ ϕ[**x**] ,! 10 (¬I: 9) ¡

∀x ¬ ϕ[x] ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **4.** P4 is an immediate corollary to P3. ¡

⊢ ¬ ϕ[0] ¡

¬ ϕ[0] ! 1 (∀E: P3) ¡

▯

! P5-P7 are variations on the same theme: any predicate equivalent to the predicate of non-identical things is itself empty. ¡

! **5.** ¡

⊢ ∀P (P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

P[**x**] & **P** ≡ ϕ ,! 5 (&I: 2,4) ¡

(**P**[**x**] & **P** ≡ ϕ ⇒ ϕ[**x**]) ,! 6 (∀E: C1.35) ¡

P[**x**] & **P** ≡ ϕ ⇒ ϕ[**x**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ϕ[**x**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ ϕ[**x**] ,! 9 (∀E: P3) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 8,9) ¡

P[**x**] ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀P (P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ P[x]) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀P (P ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 3 (∀E: P5) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 4 (()E: 3) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 6 (∀E: I3.21) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P (P ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x P[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **7.** P7 is the contrapositive of P6. ¡

⊦ ∀P (∃x P[x] ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

∃x **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 4 (∀E: P6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P (∃x P[x] ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **8.** All empty predicates are contained in every predicate. ¡

⊢ ∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ P ⊆ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 6 (∀E: P5) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 9 (∀E: 8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 4,9) ¡

¬ **Q**[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬¬ **Q**[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

Q[**x**] ,! 13 (¬E: 12) ¡

P[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ,! 14 (⇒I: 4,13) ¡

(**P**[**x**] ⇒ **Q**[**x**]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀x(**P**[x] ⇒ **Q**[x]) ,! 16 (∀I: 3,15) ¡

P ⊆ **Q** ,! 17 (𝕾I: C1.1,16) ¡

P ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ P ⊆ Q) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **9.** P9 is a corollary to P8, which says: in particular, the predicate of non-identical things is contained in every predicate. ¡

$\vdash \forall P\ \phi \subseteq P$ ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

($\phi \equiv \phi \Rightarrow \phi \subseteq \mathbf{P}$) ,! 2 (∀E: P8) ¡

$\phi \equiv \phi \Rightarrow \phi \subseteq \mathbf{P}$,! 3 (()I: 2) ¡

$\phi \equiv \phi$,! 4 (∀E: C1.9) ¡

$\phi \subseteq \mathbf{P}$,! 5 (⇒E:3,4) ¡

$\forall P\ \phi \subseteq P$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **10.** ¡

$\vdash \forall P\ (P \subseteq \phi \Rightarrow P \equiv \phi)$ ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \phi$,! 2 (Prem) ¡

$\phi \subseteq \mathbf{P}$,! 3 (∀E: P9) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \phi\ \&\ \phi \subseteq \mathbf{P}$,! 4 (&I: 2,3) ¡

($\mathbf{P} \subseteq \phi\ \&\ \phi \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi$) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \phi\ \&\ \phi \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \phi \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi$,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

($\mathbf{P} \subseteq \phi \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi$) ,! 9 (()I: 8) ¡

$\forall P\ (P \subseteq \phi \Rightarrow P \equiv \phi)$! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **11.** P11 is a corollary of P10. ¡

$\vdash \forall P \forall Q\ (Q \equiv \phi\ \&\ P \subseteq Q \Rightarrow P \equiv \phi)$ ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ,! 2 (Prem) ¡

(Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ⊆ ϕ) ,! 3 (∀E: C1.32) ¡

Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ⊆ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(P ⊆ ϕ ⇒ P ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P10) ¡

P ⊆ ϕ ⇒ P ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

P ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **12.** P12 is the contrapositive of P11. ¡

⊢ ∀P∀Q (¬ P ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ) ¡

P,Q ,! 1 (Prem) ¡

¬ P ≡ ϕ & P ⊆ Q ,! 2 (Prem) ¡

¬ P ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

P ⊆ Q ,! 4 (&E: 3) ¡

Q ≡ ϕ ,! 5 (Prem) ¡

Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ≡ ϕ) ,! 7 (∀E: P11) ¡

Q ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ P ≡ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

P ≡ ϕ ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 3,9) ¡

Q ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ Q ≡ ϕ ,! 12 (¬I: 11) ¡

¬ P ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(¬ P ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q (¬ P ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **13.** Proper containment implies non-equivalence to the predicate of non-identical things. ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊂ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊂ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊂ **Q** ⇒ ∃x **Q**[x]) ,! 3 (∀E: C1.61) ¡

P ⊂ **Q** ⇒ ∃x **Q**[x] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x **Q**[x] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(∃x **Q**[x] ⇒ ¬ **Q** ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P7) ¡

∃x **Q**[x] ⇒ ¬ **Q** ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ **Q** ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊂ **Q** ⇒ ¬ **Q** ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊂ **Q** ⇒ ¬ **Q** ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊂ Q ⇒ ¬ Q ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **14.** P14 is a corollary to P13. The predicate of non-identical things cannot properly contain a predicate. ¡

⊦ ∀P ¬ P ⊂ ϕ ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

P ⊂ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊂ ϕ ⇒ ¬ ϕ ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P13) ¡

P ⊂ ϕ ⇒ ¬ ϕ ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ ϕ ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ϕ ≡ ϕ ,! 6 (∀E: C1.9) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 5,6) ¡

P ⊂ ϕ ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

¬ **P** ⊂ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

∀P ¬ P ⊂ ϕ ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! The next propositions (P15-P18) are not positioned after P7 because they are most naturally proved using P10. They are variations on the theme: all empty predicates are equivalent to the predicate of non-identical things. ¡

! **15.** ¡

⊢ ∀P (¬ ∃x P[x] ⇒ P ≡ ϕ) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

¬ ϕ[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

∃x **P**[x] ,! 6 (∃I: 4) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

¬ ϕ[**x**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 5,7) ¡

¬¬ ϕ[**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

ϕ[**x**] ,! 10 (¬E: 9) ¡

P[**x**] ⇒ ϕ[**x**] ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

(**P**[**x**] ⇒ ϕ[**x**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x(**P**[x] ⇒ ϕ[x]) ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

P ⊆ ϕ ,! 14 (𝕾I: C1.1,13) ¡

(**P** ⊆ ϕ ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 15 (∀E: P10) ¡

P ⊆ ϕ ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 16 (()E: 15) ¡

P ≡ ϕ ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀P (¬ ∃x P[x] ⇒ P ≡ ϕ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **16.** P16 is the contrapositive of P15. ¡

⊢ ∀P (¬ P ≡ ϕ ⇒ ∃x P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 3 (Prem) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P15) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

P ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬¬ ∃x **P**[x] ,! 9 (¬I: 8) ¡

∃x **P**[x] ,! 10 (¬E: 9) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ∃x **P**[x] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ∃x **P**[x]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P (¬ P ≡ ϕ ⇒ ∃x P[x]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀P (∀x ¬ P[x] ⇒ P ≡ ϕ) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 3 (∀E: I3.21) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P15) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

P ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P (∀x ¬ P[x] ⇒ P ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **18.** P18 combines the two halves, P5 and P17. A predicate is equivalent to the predicate of non-identical things if and only if it is empty. ¡

⊢ ∀P (P ≡ ϕ ⇔ ∀x ¬ P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 2 (∀E: P5) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 3 (()E: 2) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P17) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

P ≡ ϕ ⇔ ∀x ¬ **P**[x] ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇔ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀P (P ≡ ϕ ⇔ ∀x ¬ P[x]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P19 and P20 are commutative pairs. ¡

! **19.** ¡

⊢ ∀P (P ∪ ϕ) ≡ P ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∪ ϕ) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∪ ϕ) ⇒ (**P** ∪ ϕ) ≡ **P**)
,! 2 (∀E: C1.8) ¡

(**P** ∪ ϕ) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∪ ϕ) ⇒ (**P** ∪ ϕ) ≡ **P**
,! 3 (()E: 2) ¡

! 4-7 demonstrate that (**P** ∪ ϕ) ⊆ **P**, 8 that **P** ⊆ (**P** ∪ ϕ). ¡

ϕ ⊆ **P** ,! 4 (∀E: P9) ¡

(ϕ ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ ϕ) ⊆ **P**) ,! 5 (∀E: C2.24) ¡

ϕ ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ ϕ) ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ ϕ) ⊆ **P** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ (**P** ∪ ϕ) ,! 8 (∀E: C2.12) ¡

(**P** ∪ ϕ) ⊆ **P** & **P** ⊆ (**P** ∪ ϕ) ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(**P** ∪ ϕ) ≡ **P** ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

∀P (P ∪ ϕ) ≡ P ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **20.** ¡

⊢ ∀P (ϕ ∪ P) ≡ P ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ ϕ) ≡ **P** ,! 2 (∀E: P19) ¡

((**P** ∪ ϕ) ≡ **P** ⇒ (ϕ ∪ **P**) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: C2.19) ¡

(**P** ∪ ϕ) ≡ **P** ⇒ (ϕ ∪ **P**) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(ϕ ∪ **P**) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (ϕ ∪ P) ≡ P ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! P21 and P22 are commutative pairs. ¡

! **21.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (P ∪ Q) ≡ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(ϕ ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 3 (∀E: P20) ¡

P ≡ ϕ & (ϕ ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ ϕ & (ϕ ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**)
,! 5 (∀E: C2.48) ¡

P ≡ ϕ & (ϕ ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (P ∪ Q) ≡ Q) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **22.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (Q ∪ P) ≡ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q**) ,! 3 (∀E: P21) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q**) ,! 6 (∀E: C3.17) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **Q** ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∪ **P**) ≡ **Q**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (Q ∪ P) ≡ Q) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **23. Process of Elimination: Intersection and Empty Predicate Form, n1.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (P[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 4 (&E: 2) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x]) ,! 5 (∀E: P5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x] ,! 6 (()E: 5) ¡

∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 8 (∀E: 7) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] & **P**[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 10 (∀E: C3.7) ¡

¬ (P ∩ Q)[x] & P[x] ⇒ ¬ Q[x] ,! 11 (()E: 10) ¡

¬ Q[x] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

P[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ Q[x] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(P[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ Q[x]) ,! 14 (⇒I: 13) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ Q[x]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! 24. Process of Elimination: Intersection and Empty Predicate Form, n2. ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (Q[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x]) ¡

P,Q,x ,! 1 (Prem) ¡

Q[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

Q[x] ,! 3 (&E: 2) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ,! 4 (&E: 2) ¡

((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ (Q ∩ P) ≡ ϕ) ,! 5 (∀E: C3.17) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ (Q ∩ P) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

(Q ∩ P) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q[x] & (Q ∩ P) ≡ ϕ ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(Q[x] & (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x]) ,! 9 (∀E: P23) ¡

Q[x] & (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x] ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ P[x] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(Q[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀x (Q[x] & (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P[x]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! 25. ¡

⊢ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(P[x] & Q[x])) ¡

P,Q ,! 1 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 3 (Prem) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 4 (∃E: 3) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

P[**x**] ,! 6 (&E: 5) ¡

Q[**x**] ,! 7 (&E: 5) ¡

P[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (&I: 2,6) ¡

(**P**[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 9 (∀E: P23) ¡

P[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

𝔉 ,! 12 (𝔉I: 7,11) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ 𝔉 ,! 13 (⇒I: 3,12) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 14 (¬I: 13) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x])) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(P[x] & Q[x])) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **26.** P26 is the contrapositive of P25. ¡

⊢ ∀P∀Q (∃x(P[x] & Q[x]) ⇒ ¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]))
,! 4 (∀E: P25) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q (∃x(P[x] & Q[x]) ⇒ ¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **27.** ¡

⊦ ∀P∀Q (∀x(P[x] & Q[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 5 (∀E: C3.3) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & **Q**[**x**] ,! 6 (()E: 5) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ 𝔉) ,! 8 (∀E: 2) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 9 (()E: 8) ¡

𝔉 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**P** ∩ **Q**)[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 4,10) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**)[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x] ,! 13 (∀I: 3,12) ¡

(∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x] ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 14 (∀E: P17) ¡

∀x ¬ (**P** ∩ **Q**)[x] ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 15 (()E: 14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 18 (()I: 17) ¡

∀P∀Q (∀x(P[x] & Q[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ)
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **28.** P28 is the converse of P26. ¡

⊦ ∀P∀Q (¬ ∃x(P[x] & Q[x]) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 6 (∃I: 5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: 2,6) ¡

P[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 4,7) ¡

(**P**[**x**] & **Q**[**x**] ⇒ 𝔉) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ,! 10 (∀I: 3,9) ¡

(∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 11 (∀E: P27) ¡

∀x(**P**[x] & **Q**[x] ⇒ 𝔉) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 12 (()E: 11) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀P∀Q (¬ ∃x(P[x] & Q[x]) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **29.** P29 is the contrapositive of P28. ¡

⊦ ∀P∀Q (¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ∃x(P[x] & Q[x])) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 3 (Prem) ¡

(¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 4 (∀E: P28) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬¬ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 9 (¬I: 8) ¡

∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 10 (¬E: 9) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ∃x(**P**[x] & **Q**[x]) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ∃x(**P**[x] & **Q**[x])) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀Q (¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ∃x(P[x] & Q[x])) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P30 and P31 are commutative pairs, the duals of P19 and P20. ¡

! **30.** ¡

⊢ ∀P (P ∩ ϕ) ≡ ϕ ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ ϕ) ⊆ ϕ ,! 2 (∀E: C3.11) ¡

((**P** ∩ ϕ) ⊆ ϕ ⇒ (**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P10) ¡

(**P** ∩ ϕ) ⊆ ϕ ⇒ (**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (P ∩ ϕ) ≡ ϕ ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **31.** ¡

⊢ ∀P (ϕ ∩ P) ≡ ϕ ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ,! 2 (∀E: P30) ¡

((**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ⇒ (ϕ ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: C3.17) ¡

(**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ⇒ (ϕ ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

(ϕ ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (ϕ ∩ P) ≡ ϕ ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! P32 and P33 are commutative pairs, the duals of P21 and P22.
¡

! **32.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: C3.10) ¡

P ≡ ϕ & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ ϕ & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: P11) ¡

P ≡ ϕ & (**P** ∩ **Q**) ⊆ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **33.** An alternative proof is a copy of P32's, which would have the advantage of having one less step. ¡

⊢ ∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (Q ∩ P) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P32) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: C3.17) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ≡ ϕ ⇒ (Q ∩ P) ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P34 and P35 are commutative pairs. ¡

! **34.** P34 is the contrapositive of P32. ¡

⊦ ∀P∀Q (¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P32) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q (¬ (P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **35.** P35 is the contrapositive of P33. ¡

⊦ ∀P∀Q (¬ (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P33) ¡

P ≡ ϕ ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ P ≡ ϕ ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q (¬ (Q ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ¬ P ≡ ϕ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **36.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P & S ⊆ Q ,! 2 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

R ⊆ P & S ⊆ Q ,! 4 (&E: 2) ¡

(R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q))
,! 5 (∀E: C3.30) ¡

R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ & (R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((P ∩ Q) ≡ ϕ & (R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q) ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ)
,! 9 (∀E: P11) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ & (R ∩ S) ⊆ (P ∩ Q) ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ
,! 10 (()E: 9) ¡

(R ∩ S) ≡ ϕ ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P & S ⊆ Q ⇒ (R ∩ S) ≡ ϕ)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P37 and P38 are corollaries to P36. ¡

! **37.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P ⇒ (R ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** ,! 2 (Prem) ¡

Q ⊆ **Q** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** & **Q** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: P36) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ ϕ
,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **P** ⇒ (**R** ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ P ⇒ (R ∩ Q) ≡ ϕ)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **38.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ ϕ) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: P36) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & R ⊆ Q ⇒ (P ∩ R) ≡ ϕ)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **39.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & (P ∩ R) ≡ ϕ ⇒ (P ∩ (Q ∪ R)) ≡ ϕ) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
,! 3 (∀E: C3.53) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ
& (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ
& (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ))
,! 5 (∀E: C2.40) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ
& (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ((**P** ∩ **Q**) ∪ (**P** ∩ **R**))
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ)
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(ϕ ∪ ϕ) ≡ ϕ ,! 8 (∀E: P19) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ) & (ϕ ∪ ϕ) ≡ ϕ
,! 9 (&I: 7,8) ¡

((**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ) & (ϕ ∪ ϕ) ≡ ϕ
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ϕ)
,! 10 (∀E C1.15) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ (ϕ ∪ ϕ) & (ϕ ∪ ϕ) ≡ ϕ
⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ϕ
,! 11 (()E: 10) ¡

(**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ϕ ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ϕ
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ (**Q** ∪ **R**)) ≡ ϕ)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & (P ∩ R) ≡ ϕ ⇒ (P ∩ (Q ∪ R)) ≡ ϕ)
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! P40 and P41 are commutative pairs. Their converses appear as P45 and P46. ¡

! **40.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ P ⊆ (Q^C)) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

P[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (&I: 2,4) ¡

(**P**[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 6 (∀E: P23) ¡

P[**x**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(¬ **Q**[**x**] ⇒ ($\mathbf{Q}^C$)[**x**]) ,! 9 (∀E: C4.4) ¡

¬ **Q**[**x**] ⇒ ($\mathbf{Q}^C$)[**x**] ,! 10 (()E: 9) ¡

($\mathbf{Q}^C$)[**x**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P[**x**] ⇒ ($\mathbf{Q}^C$)[**x**] ,! 12 (⇒I: 4,11) ¡

(**P**[**x**] ⇒ ($\mathbf{Q}^C$)[**x**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀x (**P**[x] ⇒ ($\mathbf{Q}^C$)[x]) ,! 14 (∀I: 3,13) ¡

P ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ,! 15 (𝕊I: C1.1,14) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ ($\mathbf{Q}^C$)) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ P ⊆ (Q^C)) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **41.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q\ (\ (P \cap Q) \equiv \phi \Rightarrow Q \subseteq (P^{C})\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi\ )$,! 3 (∀E: C3.17) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P}^{C})\ )$,! 6 (∀E: P40) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P}^{C})\ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall Q\ (\ (P \cap Q) \equiv \phi \Rightarrow Q \subseteq (P^{C})\ )$! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **42. Law of Non-Contradiction: Intersection, Complement, and Empty Predicate Form.** ¡

$\vdash \forall P\ (P \cap (P^{C})) \equiv \phi$ ¡

$\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$\forall x\ \neg\ (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C}))[x]$,! 2 (∀E: C4.9) ¡

$(\ \forall x\ \neg\ (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C}))[x] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi\ )$
,! 3 (∀E: P17) ¡

$\forall x\ \neg\ (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C}))[x] \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\forall P\ (P \cap (P^{C})) \equiv \phi$! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! P43 and P44 are commutative pairs. ¡

! **43.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ (\ Q \subseteq P\ \&\ R \subseteq (P^{C}) \Rightarrow (Q \cap R) \equiv \phi\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi$,! 3 (∀E: P42) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \;)$
,! 5 (∀E: P36) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{P}^{C})) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$
,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

$(\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \;)$,! 9 (()I: 8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \;(\; Q \subseteq P \;\&\; R \subseteq (P^{C}) \Rightarrow (Q \cap R) \equiv \phi \;)$
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **44.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \;(\; Q \subseteq P \;\&\; R \subseteq (P^{C}) \Rightarrow (R \cap Q) \equiv \phi \;)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 2 (Prem) ¡

$(\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \;)$,! 3 (∀E: P43) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\; (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \;)$,! 6 (∀E: C3.17) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \;)$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \;(\; Q \subseteq P \;\&\; R \subseteq (P^{C}) \Rightarrow (R \cap Q) \equiv \phi \;)$
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P45 and P46 are the converses of P40 and P41. They are proved here because they appel to P43 (directly or indirectly). ¡

! **45.** ¡

⊢ ∀P∀Q (Q ⊆ (P^C) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ (**P**^C) ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **P** & **Q** ⊆ (**P**^C) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **P** & **Q** ⊆ (**P**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 5 (∀E: P43) ¡

P ⊆ **P** & **Q** ⊆ (**P**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ⊆ (**P**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ⊆ (**P**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (Q ⊆ (P^C) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **46.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ⊆ (Q^C) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (**Q**^C) ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ (**Q**^C) ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P45) ¡

P ⊆ (**Q**^C) ⇒ (**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: C3.17) ¡

(**Q** ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ (**Q**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**P** ⊆ (**Q**^C) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (P ⊆ (Q^{C}) ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **47.** P47 combines the two halves, P41 and P45.
¡

⊢ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇔ Q ⊆ (P^{C})) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **Q** ⊆ (**P**^{C})) ,! 2 (∀E: P41) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **Q** ⊆ (**P**^{C}) ,! 3 (()E: 2) ¡

(**Q** ⊆ (**P**^{C}) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P45) ¡

Q ⊆ (**P**^{C}) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇔ **Q** ⊆ (**P**^{C}) ,! 6 (⇔E: 3,5) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇔ **Q** ⊆ (**P**^{C})) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇔ Q ⊆ (P^{C})) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P48 and P49 are commutative pairs. ¡

! **48.** ¡

⊢ ∀P∀Q (Q ⊆ P ⇒ ((P^{C}) ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ **P** ,! 2 (Prem) ¡

(**P**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

Q ⊆ **P** & (**P**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ⊆ **P** & (**P**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ⇒ ((**P**^{C}) ∩ **Q**) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: P44) ¡

Q ⊆ **P** & (**P**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ⇒ ((**P**^{C}) ∩ **Q**) ≡ ϕ
,! 6 (()E: 5) ¡

((**P**^{C}) ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ⊆ **P** ⇒ ((**P**^{C}) ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ⊆ **P** ⇒ ((**P**^{C}) ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (Q ⊆ P ⇒ ((P^C) ∩ Q) ≡ ϕ) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **49.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ (Q^C)) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

($\mathbf{Q}^C$) ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **Q** & ($\mathbf{Q}^C$) ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **Q** & ($\mathbf{Q}^C$) ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ⇒ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^C$)) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: P43) ¡

P ⊆ **Q** & ($\mathbf{Q}^C$) ⊆ ($\mathbf{Q}^C$) ⇒ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^C$)) ≡ ϕ
,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** ∩ ($\mathbf{Q}^C$)) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^C$)) ≡ ϕ ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^C$)) ≡ ϕ) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ (P ∩ (Q^C)) ≡ ϕ) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯