!CHAPTER 7

DIFFERENCES¡

! The purpose of this chapter is to introduce the concept of differences. The difference of **P** and **Q**, written (**P** \ **Q**), is satisfied by all those things which are satisfied by **P** but not by **Q**. ¡

! **1.** \ represents difference (of one-place predicates). Unlike previous 𝔻-definitions, P1 will be appealed to more than once, because it can be convenient to replace $(P \setminus Q)$ or $(P \cap (Q^C))$ with the other immediately, which the 𝔻I and 𝔻E rules allow. ¡

$\mathbb{D}$ \ ; $(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$; ; $(\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C))$ ¡

! P2 appeals to P1, and in turn is appealed to, directly or indirectly, by P3 to P10. ¡

! **2.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall x\ (\ (P \setminus Q)[x] \Leftrightarrow P[x]\ \&\ \neg\ Q[x]\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{x}$,! 1 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]\ )$,! 2 (∀E: C3.2) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C))[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]$,! 3 (()E: 2) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]$,! 4 (𝔻I: P1,3) ¡

$(\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]\ )$,! 5 (∀E: C4.2) ¡

$(\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})[\mathbf{x}]$,! 7 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]$,! 8 (⇔E: 4) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ (\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]$,! 9 (⇒E: 7,9) ¡

$(\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}]$,! 10 (&E: 9) ¡

$(\mathbf{Q}^C)[\mathbf{x}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 11 (⇔E: 6) ¡

$\neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 12 (⇒E: 10,11) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 13 (&E: 9) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 14 (&I: 12,13) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 15 (⇒I: 7,14) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 16 (Prem) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 17 (&E: 16) ¡

$\neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$,! 18 (&E: 16) ¡

¬ **Q**[**x**] ⇒ (**Q**^{C})[**x**] ,! 19 (⇔E: 6) ¡

(**Q**^{C})[**x**] ,! 20 (⇒E: 18,19) ¡

P[**x**] & (**Q**^{C})[**x**] ,! 21 (&I: 17,20) ¡

P[**x**] & (**Q**^{C})[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 22 (⇔E: 4) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 23 (⇒E: 21,22) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 24 (⇒I: 16,23) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 25 (⇔I: 15,24) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇔ P[x] & ¬ Q[x]) ! 27 (∀I: 1,26) ¡

□

! **3.** An immediate corollary to P2. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ P[x] & ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ P[x] & ¬ Q[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **4.** Another immediate corollary to P2. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (P[x] & ¬ Q[x] ⇒ (P \ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇔ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 3 (()E: 2) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] & ¬ Q[x] ⇒ (P \ Q)[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **5.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ P[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

P[**x**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ P[x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ ¬ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P∀Q∀x ((P \ Q)[x] ⇒ ¬ Q[x]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **7.** P7 is the contrapositive of P5. ¡

⊦ ∀P∀Q∀x (¬ P[x] ⇒ ¬ (P \ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 4 (∀E: P5) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

P[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

¬ **P**[**x**] ⇒ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(¬ **P**[**x**] ⇒ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q∀x (¬ P[x] ⇒ ¬ (P \ Q)[x]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **8.** P8 is the contrapositive of P6. ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (Q[x] ⇒ ¬ (P \ Q)[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

Q[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**]) ,! 4 (∀E: P6) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ¬ **Q**[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ℑ ,! 7 (ℑI: 2,6) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ ℑ ,! 8 (⇒I: 3,7) ¡

¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 9 (¬I: 8) ¡

Q[**x**] ⇒ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**Q**[**x**] ⇒ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q∀x (Q[x] ⇒ ¬ (P \ Q)[x]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **9. Process of Elimination: Difference Form.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (P[x] & ¬ (P \ Q)[x] ⇒ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **Q**[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(**P**[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**]) ,! 7 (∀E: P4) ¡

P[**x**] & ¬ **Q**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 8 (()E: 7) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$\mathfrak{F}$,! 10 ($\mathfrak{F}$I: 4,9) ¡

¬ **Q**[**x**] ⇒ $\mathfrak{F}$,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬¬ **Q**[**x**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

Q[**x**] ,! 13 (¬E: 12) ¡

P[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(**P**[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] & ¬ (P \ Q)[x] ⇒ Q[x]) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **10. Law of Excluded Middle, Restricted Predicate Version.** The Law of Excluded Middle says that, for all x, either something or not something. P10 restricts the range of x to all those things which satisfy a predicate P; and says that either x satisfies Q or does not satisfy Q. ¡

⊢ ∀P∀Q∀x (P[x] ⇒ (P \ Q)[x] ∨ Q[x]) ¡

P,**Q**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

P[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**)[**x**] ∨ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**]) ,! 3 (∀E: I3.15) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ∨ ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ,! 5 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 6 (∨I: 5) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 7 (⇒I: 5,6) ¡

¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 8 (Prem) ¡

P[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(**P**[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**]) ,! 10 (∀E: P9) ¡

P[**x**] & ¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ **Q**[**x**] ,! 11 (()E: 10) ¡

Q[**x**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 13 (∨I: 12) ¡

¬ (**P** \ **Q**)[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 14 (⇒I: 8,13) ¡

(**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 15 (∨E: 4,7,14) ¡

P[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(**P**[**x**] ⇒ (**P** \ **Q**)[**x**] ∨ **Q**[**x**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀P∀Q∀x (P[x] ⇒ (P \ Q)[x] ∨ Q[x]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! Neither P11 nor P12 will be used, since the ⅅI and ⅅE rules are more convenient. ¡

! **11.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P \ Q) ≡ (P ∩ (Q^{C})) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ ($\mathbf{Q}^{C}$)) ≡ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^{C}$)) ,! 2 (∀E: C1.9) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ (**P** ∩ ($\mathbf{Q}^{C}$)) ,! 3 (ⅅI: P1,2) ¡

∀P∀Q (P \ Q) ≡ (P ∩ (Q^{C})) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P \ Q) ≡ ((Q^{C}) ∩ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ ($\mathbf{Q}^{C}$)) ≡ (($\mathbf{Q}^{C}$) ∩ **P**) ,! 2 (∀E: C3.14) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ (($\mathbf{Q}^{C}$) ∩ **P**) ,! 3 (ⅅI: P1,2) ¡

∀P∀Q (P \ Q) ≡ ((Q^{C}) ∩ P) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! P13 through P29 are propositions about differences and inclusion, and are organized by where the difference is (before or after the implication, on the left- or right-hand side of the inclusion). P13 and P14 appeal to P1, and then in turn are used, directly or indirectly, by P15 through P23. P24 appeals back to

P1, and is then used through P29 (indeed, P49). ¡

! **13.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P \ Q) ⊆ P ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ (**Q**^{C})) ⊆ **P** ,! 2 (∀E: C3.10) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀P∀Q (P \ Q) ⊆ P ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **14.** ¡

⊦ ∀P∀Q (P \ Q) ⊆ (Q^{C}) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ (**Q**^{C})) ⊆ (**Q**^{C}) ,! 2 (∀E: C3.11) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ (**Q**^{C}) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀P∀Q (P \ Q) ⊆ (Q^{C}) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **15.** An alternative proof would be to use C3.21 and 𝔻I (P1). This would save a step. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ (P \ Q) ⊆ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **P** ,! 3 (∀E: P13) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**P** \ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R**)
,! 5 (∀E: C1.5) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **P** & **P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R**) ,! 9 (()E: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ (P \ Q) ⊆ R) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

! **16.** ¡

⊢ $\forall P \forall Q \forall R \ (\ (Q^C) \subseteq R \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq R \ )$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 3 (∀E: P14) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \ \& \ (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R}$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \ \& \ (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \ )$
,! 5 (∀E: C1.5) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \ \& \ (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$
,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$(\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

$(\ (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \ )$,! 9 (()E: 8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \ (\ (Q^C) \subseteq R \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq R \ )$! 10 (∀I: 1,9) ¡

! **17.** ¡

⊢ $\forall P \forall Q \forall R \ (\ (R^C) \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq R \ )$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^C) \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{R}^C) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \ )$,! 3 (∀E: C4.12) ¡

$(\mathbf{R}^C) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R}$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R}$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \ )$,! 6 (∀E: P16) ¡

$(\mathbf{Q}^C) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$(\mathbf{R}^C) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\ (\mathbf{R}^C) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \ )$,! 10 (()E: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ (\ (R^{C}) \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq R\ )$! 11 ($\forall$I: 1,9) ¡

▯

! **18.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ (\ R \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq (R^{C})\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{R}^{C})^{C}) \equiv \mathbf{R}$,! 3 ($\forall$E: C4.20) ¡

$((\mathbf{R}^{C})^{C}) \equiv \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q}$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\ ((\mathbf{R}^{C})^{C}) \equiv \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{R}^{C})^{C}) \subseteq \mathbf{Q}\ )$
,! 5 ($\forall$E: C1.29) ¡

$((\mathbf{R}^{C})^{C}) \equiv \mathbf{R}\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{R}^{C})^{C}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 6 (()E: 5) ¡

$((\mathbf{R}^{C})^{C}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$(\ ((\mathbf{R}^{C})^{C}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{R}^{C})\ )$,! 8 ($\forall$E: P17) ¡

$((\mathbf{R}^{C})^{C}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 9 (()E: 8) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 10 ($\Rightarrow$E: 7,9) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 11 ($\Rightarrow$I: 2,10) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{R}^{C})\ )$,! 12 (()E: 11) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ (\ R \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \subseteq (R^{C})\ )$! 13 ($\forall$I: 1,12) ¡

▯

! **19.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ (\ R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow R \subseteq P\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 3 ($\forall$E: P13) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}\ )$
,! 5 ($\forall$E: C1.5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 8 ($\Rightarrow$I: 2,7) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P})$,! 9 (()E: 8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow R \subseteq P)$! 10 ($\forall$I: 1,9) ¡

▯

! **20.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow R \subseteq (Q^C))$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 3 ($\forall$E: P14) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \ \& \ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \ \& \ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C))$
,! 5 ($\forall$E: C1.5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \ \& \ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$
,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 8 ($\Rightarrow$I: 2,7) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C))$,! 9 (()E: 8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow R \subseteq (Q^C))$! 10 ($\forall$I: 1,9) ¡

▯

! **21.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow Q \subseteq (R^C))$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C))$,! 3 ($\forall$E: P20) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^C))$,! 6 ($\forall$E: C4.13) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 7 (()E: 6) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}))$,! 10 (()E: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow Q \subseteq (R^{C}))$! 11 ($\forall$I: 1,9) ¡

▯

! **22.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow (Q \cap R) \equiv \phi)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}))$,! 3 ($\forall$E: P20) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C})$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C})$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi)$,! 6 ($\forall$E: C5.45) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi)$,! 10 (()E: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow (Q \cap R) \equiv \phi)$! 11 ($\forall$I: 1,9) ¡

▯

! **23.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow (R \cap Q) \equiv \phi)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi)$,! 3 ($\forall$E: P22) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$((\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 6 ($\forall$E: C3.17) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 10 (()E: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq (P \setminus Q) \Rightarrow (R \cap Q) \equiv \phi)$! 11 ($\forall$I: 1,9) ¡

□

! **24.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P \ \& \ R \subseteq (Q^C) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)))$
,! 3 ($\forall$E: C3.12) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C))$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C))$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 6 ($\mathbb{D}$I: P1,5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 7 ($\Rightarrow$I: 2,6) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 8 (()E: 7) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P \ \& \ R \subseteq (Q^C) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$
! 9 ($\forall$I: 1,8) ¡

□

! **25.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P \ \& \ Q \subseteq (R^C) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \ \& \ \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^C)$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^C)$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C))$,! 5 ($\forall$E: C4.13) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^C) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^C)$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C})$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C})$,! 8 (&I: 3,7) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 9 ($\forall$E: P24) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{Q}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 11 ($\Rightarrow$E: 8,10) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 12 ($\Rightarrow$I: 2,11) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 13 (()E: 12) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P$ & $Q \subseteq (R^{C}) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$
! 14 ($\forall$I: 1,13) ¡

▯

! **26.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P$ & $Q \subseteq (P \setminus R) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 3 (&E: 2) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}))$,! 5 ($\forall$E: P20) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C})$,! 8 (&I: 3,7) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 9 ($\forall$E: P25) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{R}^{C}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 10 (()E: 9) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 11 ($\Rightarrow$E: 8,10) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 12 ($\Rightarrow$I: 2,11) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$ & $\mathbf{Q} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 13 (()E: 12) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (R \subseteq P$ & $Q \subseteq (P \setminus R) \Rightarrow R \subseteq (P \setminus Q))$
! 14 ($\forall$I: 1,13) ¡

▯

! **27.** There is an alternative proof, which uses C3.30 and two applications of 𝔻I, which has one fewer step (16 versus the actual 17). ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ R & S ⊆ Q ⇒ (P \ Q) ⊆ (R \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** & **S** ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

S ⊆ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R**) ,! 5 (∀E: P15) ¡

P ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ **R** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **R** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**S** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C})) ,! 8 (∀E: P18) ¡

S ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C}) ,! 9 (()E: 8) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C}) ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **R** & (**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C}) ,! 11 (&I: 7,10) ¡

((**P** \ **Q**) ⊆ **R** & (**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C}) ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **S**))
,! 12 (∀E: P24) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ **R** & (**P** \ **Q**) ⊆ (**S**^{C}) ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **S**)
,! 13 (()E: 12) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **S**) ,! 14 (⇒E: 1,13) ¡

P ⊆ **R** & **S** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **S**) ,! 15 (⇒I: 2,13) ¡

(**P** ⊆ **R** & **S** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **S**))
,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ⊆ R & S ⊆ Q ⇒ (P \ Q) ⊆ (R \ S))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **28.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ (P \ Q) ⊆ (R \ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

Q ⊆ **Q** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **R** & **Q** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **R** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **Q**))
,! 5 (∀E: P27) ¡

P ⊆ **R** & **Q** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**R** \ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ (P \ Q) ⊆ (R \ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **29.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (R ⊆ Q ⇒ (P \ Q) ⊆ (P \ R)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

R ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

P ⊆ **P** ,! 3 (∀E: C1.4) ¡

P ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**P** \ **R**))
,! 5 (∀E: P27) ¡

P ⊆ **P** & **R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**P** \ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ⊆ (**P** \ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**P** \ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ⊆ (**P** \ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (R ⊆ Q ⇒ (P \ Q) ⊆ (P \ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! P30 through P37 state that differences maintain equivalence, for both positions (P30 through P33), for the left position only (P34-P35), and for the right position (P36-P37). ¡

! **30.** An alternative proof would copy that of P27's, only using C3.33 instead of C3.30. It would have far fewer steps (16 versus the actual 29). ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (P \ S) ≡ (R \ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \equiv \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{Q} \equiv \mathbf{S}$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \equiv \mathbf{R}$,! 3 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{P} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P})$,! 4 (∀E: C1.13) ¡

$\mathbf{P} \equiv \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 5 (()E: 4) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}$,! 7 (&E: 6) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 8 (&E: 6) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{S}$,! 9 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{Q} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q})$,! 10 (∀E: C1.13) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$,! 11 (()E: 10) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S}$,! 13 (&E: 12) ¡

$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$,! 14 (&E: 12) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S}$,! 15 (&I: 7,13) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
,! 16 (∀E: P27) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R} \mathbin{\&} \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$,! 17 (()E: 16) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$,! 19 (&I: 8,14) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}))$
,! 20 (∀E: P27) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \mathbin{\&} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S})$,! 21 (()E: 20) ¡

$(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S})$,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \mathbin{\&} (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S})$
,! 23 (&I: 19,22) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \mathbin{\&} (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S})$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
,! 24 (∀E: C1.8) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{S}) \subseteq (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \mathbin{\&} (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{S})$

⇒ (**P** \ **S**) ≡ (**R** \ **Q**)
,! 25 (()E: 24) ¡

(**P** \ **S**) ≡ (**R** \ **Q**) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **S**) ≡ (**R** \ **Q**) ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **S**) ≡ (**R** \ **Q**)) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (P \ S) ≡ (R \ Q))
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **31.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (P \ Q) ≡ (R \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ≡ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **Q**) ,! 5 (∀E: C1.10) ¡

Q ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**P** ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **S**))
,! 9 (∀E: P30) ¡

P ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **S**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **S**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **S**)) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (P \ Q) ≡ (R \ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **32.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (R \ S) ≡ (P \ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ≡ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **R** ⇒ **R** ≡ **P**) ,! 5 (∀E: C1.10) ¡

P ≡ **R** ⇒ **R** ≡ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

R ≡ **P** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

R ≡ **P** & **Q** ≡ **S** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**R** ≡ **P** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **S**) ≡ (**P** \ **Q**))
,! 9 (∀E: P30) ¡

R ≡ **P** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **S**) ≡ (**P** \ **Q**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**R** \ **S**) ≡ (**P** \ **Q**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **S**) ≡ (**P** \ **Q**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **S**) ≡ (**P** \ **Q**)) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (R \ S) ≡ (P \ Q))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **33.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

Q ≡ **S** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **Q**) ,! 5 (∀E: C1.4) ¡

Q ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**P** ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **S**))
,! 9 (∀E: P32) ¡

P ≡ **R** & **S** ≡ **Q** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **S**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **S**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ R & Q ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **34.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ R ⇒ (P \ Q) ≡ (R \ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **Q** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **Q**))
,! 5 (∀E: P30) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **Q**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **Q**) ,! 8 (⇒I: 7) ¡

(**P** ≡ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**R** \ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ R ⇒ (P \ Q) ≡ (R \ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **35.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ≡ R ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ Q)) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **Q** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **R** & **Q** ≡ **Q** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **R** & **Q** ≡ **Q** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ (**P** \ **Q**))
,! 5 (∀E: P32) ¡

P ≡ R & Q ≡ Q ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ Q) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R \ Q) ≡ (P \ Q) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ R ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ Q) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(P ≡ R ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ Q)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (P ≡ R ⇒ (R \ Q) ≡ (P \ Q)) ! 10 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ R ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ P ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ P & Q ≡ R ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(P ≡ P & Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q))
,! 5 (∀E: P30) ¡

P ≡ P & Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q) ,! 6 (()E: 5) ¡

(P \ R) ≡ (P \ Q) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (Q ≡ R ⇒ (P \ R) ≡ (P \ Q)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **37.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (Q ≡ R ⇒ (P \ Q) ≡ (P \ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ R ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ P ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ P & Q ≡ R ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(P ≡ P & Q ≡ R ⇒ (P \ Q) ≡ (P \ R))
,! 5 (∀E: P31) ¡

P ≡ **P** & **Q** ≡ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **R** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ (**P** \ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R (Q ≡ R ⇒ (P \ Q) ≡ (P \ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! P38-P49 are yet more propositions on the theme that differences maintain equivalence. P38-P41 are corollaries of P31, and in turn are appealed to by P42 through P49. ¡

! **38.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P \ R) ⇒ T ≡ (Q \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**))
,! 5 (∀E: P31) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**T** ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**))
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (**Q** \ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & T ≡ (P \ R) ⇒ T ≡ (Q \ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **39.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P \ R) ≡ T ⇒ (Q \ S) ≡ T) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**))
,! 5 (∀E: P31) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**)
,! 9 (∀E: C1.19) ¡

(**P** \ **R**) ≡ (**Q** \ **S**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **S** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (P ≡ Q & R ≡ S & (P \ R) ≡ T ⇒ (Q \ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **40.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P \ R) ⇒ T ≡ (Q \ S)) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**))
,! 5 (∀E: P31) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) & (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**T** ≡ (**P** \ **R**) & (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**))
,! 9 (∀E: C1.17) ¡

T ≡ (**P** \ **R**) & (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**)
,! 10 (()E: 9) ¡

T ≡ (**Q** \ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** & **T** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **T** ≡ (**Q** \ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & T ≡ (P \ R) ⇒ T ≡ (Q \ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **41.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P \ R) ≡ T ⇒ (Q \ S) ≡ T) ¡

P,**Q**,**R**,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**))
,! 5 (∀E: P31) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**)
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ (**P** \ **R**) & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**Q** \ **S**) ≡ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**Q** ≡ **P** & **S** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **T** ⇒ (**Q** \ **S**) ≡ **T**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R∀S∀T (Q ≡ P & S ≡ R & (P \ R) ≡ T ⇒ (Q \ S) ≡ T)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **42.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P \ R) ≡ S ⇒ (Q \ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P39) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** \ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (P \ R) ≡ S ⇒ (Q \ R) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **43.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**P** ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** \ **R**))
,! 5 (∀E: P38) ¡

P ≡ **Q** & **R** ≡ **R** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** \ **R**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**Q** \ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** \ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ⇒ **S** ≡ (**Q** \ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **44.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P39) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** \ **Q**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & (**R** \ **P**) ≡ **S** ⇒ (**R** \ **Q**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **45.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R \ P) ⇒ S ≡ (R \ Q)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** \ **Q**))
,! 5 (∀E: P38) ¡

R ≡ **R** & **P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** \ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (**R** \ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

P ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** \ **Q**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**P** ≡ **Q** & **S** ≡ (**R** \ **P**) ⇒ **S** ≡ (**R** \ **Q**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (P ≡ Q & S ≡ (R \ P) ⇒ S ≡ (R \ Q))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **46.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P \ R) ≡ S ⇒ (Q \ R) ≡ S) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**)
,! 5 (∀E: P41) ¡

Q ≡ **P** & **R** ≡ **R** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**
,! 6 (()E: 5) ¡

(**Q** \ **R**) ≡ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ **P** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ **P** & (**P** \ **R**) ≡ **S** ⇒ (**Q** \ **R**) ≡ **S**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (P \ R) ≡ S ⇒ (Q \ R) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **47.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R)) ¡

P,**Q**,**R**,**S** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ **P** & **S** ≡ (**P** \ **R**) ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **R** ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

Q ≡ P & R ≡ R & S ≡ (P \ R) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(Q ≡ P & R ≡ R & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R))
,! 5 (∀E: P40) ¡

Q ≡ P & R ≡ R & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R)
,! 6 (()E: 5) ¡

S ≡ (Q \ R) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ P & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(Q ≡ P & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (P \ R) ⇒ S ≡ (Q \ R))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **48.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ R ,! 3 (∀E: C1.9) ¡

R ≡ R & Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ≡ R & Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S)
,! 5 (∀E: P41) ¡

R ≡ R & Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S
,! 6 (()E: 5) ¡

(R \ Q) ≡ S ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & (R \ P) ≡ S ⇒ (R \ Q) ≡ S)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **49.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R∀S (Q ≡ P & S ≡ (R \ P) ⇒ S ≡ (R \ Q)) ¡

P,Q,R,S ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P})$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}$,! 3 ($\forall$E: C1.9) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \;\&\; \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P})$,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \;\&\; \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
,! 5 ($\forall$E: P40) ¡

$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R} \;\&\; \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$
,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$,! 8 ($\Rightarrow$I: 2,7) ¡

$(\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \;\&\; \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{S} \equiv (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$,! 9 (()I: 8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \forall S \; (Q \equiv P \;\&\; S \equiv (R \setminus P) \Rightarrow S \equiv (R \setminus Q))$
! 10 ($\forall$I: 1,9) ¡

□

! P50-P54 involve propositions where the difference is empty. ¡

! **50.** P50 reverts to an appeal to P1. ¡

$\vdash \forall P \forall Q \; (P \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \equiv \phi)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi)$,! 3 ($\forall$E: C5.49) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 6 (ⅅI: P1,5) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 7 ($\Rightarrow$I: 2,6) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 8 (()I: 7) ¡

$\forall P \forall Q \; (P \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \equiv \phi)$! 9 ($\forall$I: 1,8) ¡

□

! **51.** ¡

$\vdash \forall P \; (P \setminus P) \equiv \phi$ ¡

$\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}$,! 2 ($\forall$E: C1.4) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi)$,! 3 ($\forall$E: P50) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$\forall P\ (P \setminus P) \equiv \phi$! 6 ($\forall$I: 1,5) ¡

▯

! **52.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q\ (P \equiv \phi \Rightarrow (P \setminus Q) \equiv \phi)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q})$,! 3 ($\forall$E: C5.8) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$,! 4 (()E: 3) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 6 ($\forall$E: P50) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 7 (()E: 6) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall Q\ (P \equiv \phi \Rightarrow (P \setminus Q) \equiv \phi)$! 11 ($\forall$I: 1,10) ¡

▯

! **53.** P53 is the converse of P50. ¡

$\vdash \forall P \forall Q((P \setminus Q) \equiv \phi \Rightarrow P \subseteq Q)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi$,! 3 (ⅅE: P1,2) ¡

$((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q}^{C}) \subseteq (\mathbf{P}^{C}))$,! 4 ($\forall$E: C5.41) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q}^{C}) \subseteq (\mathbf{P}^{C})$,! 5 (()E: 4) ¡

(**Q**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

((**Q**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 7 (∀E: C4.22) ¡

(**Q**^{C}) ⊆ (**P**^{C}) ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 8 (()E: 7) ¡

P ⊆ **Q** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

((**P** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q((P \ Q) ≡ ϕ ⇒ P ⊆ Q) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **54.** P54 combines the halves P52 and P53. ¡

⊦ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇔ (P \ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ϕ) ,! 2 (∀E: P50) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ϕ ,! 3 (()E: 2) ¡

((**P** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q**) ,! 4 (∀E: P53) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ **Q** ,! 5 (()E: 4) ¡

P ⊆ **Q** ⇔ (**P** \ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇔ (**P** \ **Q**) ≡ ϕ) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀P∀Q (P ⊆ Q ⇔ (P \ Q) ≡ ϕ) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! P55-P59 are propositions where the difference is equivalent to the left-hand side of the difference, i.e. (P \ Q) ≡ P. ¡

! **55.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ (P \ Q) ≡ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ (**Q**^{C})) ,! 3 (∀E: C5.40) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ **P** ⊆ (**Q**^{C}) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ (**Q**^{C}) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ⊆ (**Q**^{C}) ⇒ (**P** ∩ (**Q**^{C})) ≡ **P**) ,! 6 (∀E: C3.25) ¡

P ⊆ (**Q**^{C}) ⇒ (**P** ∩ (**Q**^{C})) ≡ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∩ (**Q**^{C})) ≡ **P** ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 9 (ⅅI: P1,8) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P**) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ (P \ Q) ≡ P) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **56.** ¡

⊦ ∀P (P \ ϕ) ≡ P ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ,! 2 (∀E: C5.30) ¡

((**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ ϕ) ≡ **P**) ,! 3 (∀E: P55) ¡

(**P** ∩ ϕ) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ ϕ) ≡ **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** \ ϕ) ≡ **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P (P \ ϕ) ≡ P ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **57.** ¡

⊦ ∀P∀Q (Q ≡ ϕ ⇒ (P \ Q) ≡ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

Q ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(**P** \ ϕ) ≡ **P** ,! 3 (∀E: P56) ¡

Q ≡ ϕ & (**P** \ ϕ) ≡ **P** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**Q** ≡ ϕ & (**P** \ ϕ) ≡ **P** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P**)
,! 5 (∀E: P48) ¡

Q ≡ ϕ & (**P** \ ϕ) ≡ **P** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

Q ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**Q** ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀Q (Q ≡ ϕ ⇒ (P \ Q) ≡ P) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **58.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P \ Q) ≡ P ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ (**P** \ **Q**)) ,! 3 (∀E: C1.12) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ **P** ⊆ (**P** \ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

P ⊆ (**P** \ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ⊆ (**P** \ **Q**) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P23) ¡

P ⊆ (**P** \ **Q**) ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q ((P \ Q) ≡ P ⇒ (P ∩ Q) ≡ ϕ) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **59.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇔ (P \ Q) ≡ P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P**) ,! 2 (∀E: P55) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 3 (()E: 2) ¡

((**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P58) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ **P** ⇒ (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇔ (**P** \ **Q**) ≡ **P** ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇔ (**P** \ **Q**) ≡ **P**) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇔ (P \ Q) ≡ P) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P60-P66 involve the union of a difference. ¡

! **60.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ ((P \setminus Q) \cup R) \equiv ((P \cup R) \setminus (Q \cap (R^C)))$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R}))$
,! 2 ($\forall$E: C3.58) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R}))$
,! 3 (ⅅI: P1,2) ¡

$((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup ((\mathbf{R}^C)^C))$,! 4 ($\forall$E: C4.28) ¡

$((\mathbf{R}^C)^C) \equiv \mathbf{R}$,! 5 ($\forall$E: C4.20) ¡

$((\mathbf{R}^C)^C) \equiv \mathbf{R}\ \&\ ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup ((\mathbf{R}^C)^C))$
,! 6 (&I: 4,5) ¡

$(\ ((\mathbf{R}^C)^C) \equiv \mathbf{R}\ \&\ ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup ((\mathbf{R}^C)^C))$
$\Rightarrow ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})\ )$
,! 7 ($\forall$E: C2.47) ¡

$((\mathbf{R}^C)^C) \equiv \mathbf{R}\ \&\ ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup ((\mathbf{R}^C)^C))$
$\Rightarrow ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})$
,! 8 (()E: 7) ¡

$((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})$,! 9 ($\Rightarrow$E: 6,8) ¡

$((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})$
$\&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R}))$
,! 10 (&I: 3,9) ¡

$(\ ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})$
$\&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C))\ )$
,! 11 ($\forall$E: C3.47) ¡

$((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C) \equiv ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R})$
$\&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q}^C) \cup \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C))$
,! 12 (()E: 11) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \cap ((\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C))^C))$
,! 13 ($\Rightarrow$E: 10,12) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \setminus (\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C)))$,! 14 (ⅅI: P1,13) ¡

∀P∀Q∀R ((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q ∩ (R^C)))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **61.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R ((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q ∩ (R^C)))
,! 2 (∀E: P60) ¡

((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ,! 3 (ⅅI: P1,2) ¡

∀P∀Q∀R ((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R))
! 4 (∀I: 1,3) ¡

□

! **62.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (Q ⊆ R ⇒ ((P \ Q) ∪ R) ≡ (P ∪ R)) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ R ,! 2 (Prem) ¡

((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ,! 3 (∀E: P61) ¡

(Q ⊆ R ⇒ (Q \ R) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P50) ¡

Q ⊆ R ⇒ (Q \ R) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(Q \ R) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

((Q \ R) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ≡ (P ∪ R))
,! 7 (∀E: P57) ¡

(Q \ R) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ≡ (P ∪ R)
,! 8 (()E: 7) ¡

((P ∪ R) \ (Q \ R)) ≡ (P ∪ R) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R))
& ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ≡ (P ∪ R)
,! 10 (&I: 3,9) ¡

(((P \ Q) ∪ R) ≡ ((P ∪ R) \ (Q \ R))
& ((P ∪ R) \ (Q \ R)) ≡ (P ∪ R)
⇒ ((P \ Q) ∪ R) ≡ (P ∪ R))
,! 11 (∀E: C1.15) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ ((**P** ∪ **R**) \ (**Q** \ **R**))
& ((**P** ∪ **R**) \ (**Q** \ **R**)) ≡ (**P** ∪ **R**)
⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ **R**)
,! 12 (()E: 11) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

Q ⊆ **R** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ **R**) ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(**Q** ⊆ **R** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ (**P** ∪ **R**)) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀P∀Q∀R (Q ⊆ R ⇒ ((P \ Q) ∪ R) **≡** (P ∪ R))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **63.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P \ Q) ∪ Q) **≡** (P ∪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(**Q** ⊆ **Q** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**)) ,! 2 (∀E: P62) ¡

Q ⊆ **Q** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 3 (()E: 2) ¡

Q ⊆ **Q** ,! 4 (∀E: C1.4) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 5 (⇒E: 3,4) ¡

∀P∀Q ((P \ Q) ∪ Q) **≡** (P ∪ Q) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **64.** ¡

⊦ ∀P∀Q P ⊆ ((P \ Q) ∪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (∀E: P63) ¡

P ⊆ (**P** ∪ **Q**) ,! 3 (∀E: C2.12) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & **P** ⊆ (**P** ∪ **Q**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & **P** ⊆ (**P** ∪ **Q**)
⇒ **P** ⊆ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**))
,! 5 (∀E: C1.31) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & **P** ⊆ (**P** ∪ **Q**)
⇒ **P** ⊆ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**)
,! 6 (()E: 5) ¡

P ⊆ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q P ⊆ ((P \ Q) ∪ Q) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **65.** P65 could be proven by appealing to P64, but the proof is longer than the following, which uses P63 directly. ¡

⊢ ∀P∀Q (Q ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ Q) **≡** P) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) ,! 2 (∀E: P63) ¡

Q ⊆ **P** ,! 3 (Prem) ¡

(**Q** ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **P**) ,! 4 (∀E: C2.26) ¡

Q ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **P** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **P**
,! 7 (&I: 2,6) ¡

(((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **P**
⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ **P**)
,! 8 (∀E: C1.15) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ (**P** ∪ **Q**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ **P**
⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ **P**
,! 9 (()E: 8) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ **P** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

Q ⊆ **P** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ **P** ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

(**Q** ⊆ **P** ⇒ ((**P** \ **Q**) ∪ **Q**) ≡ **P**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀Q (Q ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ Q) **≡** P) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **66.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (R ⊆ P ⇒ ((P \ Q) ∪ R) **≡** (P \ (Q \ R))) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

R ⊆ **P** ,! 2 (Prem) ¡

((**P** \ **Q**) ∪ **R**) ≡ ((**P** ∪ **R**) \ (**Q** \ **R**)) ,! 3 (∀E: P61) ¡

(**R** ⊆ **P** ⇒ (**P** ∪ **R**) ≡ **P**) ,! 4 (∀E: C2.26) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{P}$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{P}$,! 6 ($\Rightarrow$E: 2,5) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{P}\ \&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
,! 7 (&I: 3,6) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{P}\ \&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))\ )$
,! 8 ($\forall$E: P43) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{P}\ \&\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cup \mathbf{R}) \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$,! 10 ($\Rightarrow$E: 7,9) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
,! 11 ($\Rightarrow$I: 2,10) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))\ )$
,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ (\ R \subseteq P \Rightarrow ((P \setminus Q) \cup R) \equiv (P \setminus (Q \setminus R))\ )$
! 13 ($\forall$I: 1,12) ¡

▯

! P67-P79 involve the difference of a union: in P67-P78, the union is on the left-hand side of the difference, in P79 on the right-hand side. ¡

! **67.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ ((P \cup Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R) \cup (Q \setminus R))$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{R}^C)) \cup (\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 2 ($\forall$E: C3.54) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{R}^C)) \cup (\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})) \cup (\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 4 (𝔻I: P1,3) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})) \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$,! 5 (𝔻I: P1,4) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ ((P \cup Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R) \cup (Q \setminus R))$
! 6 ($\forall$I: 1,5) ¡

▯

! **68.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) \ R) **≡** ((Q ∪ P) \ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 2 (∀E: C2.16) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ ((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ ((**Q** ∪ **P**) \ **R**))
,! 3 (∀E: P34) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ⇒ ((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ ((**Q** ∪ **P**) \ **R**)
,! 4 (()E: 3) ¡

(**P** \ **R**) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∪ Q) \ R) **≡** ((Q ∪ P) \ R) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **69.** P69 is a variation on Process of Elimination. ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **R** ,! 2 (Prem) ¡

((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ,! 3 (∀E: P67) ¡

(**P** ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ ϕ) ,! 4 (∀E: P54) ¡

P ⊆ **R** ⇒ (**P** \ **R**) ≡ ϕ ,! 5 (()E: 4) ¡

(**P** \ **R**) ≡ ϕ ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

((**P** \ **R**) ≡ ϕ ⇒ ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ≡ (**Q** \ **R**))
,! 7 (∀E: C5.21) ¡

(**P** \ **R**) ≡ ϕ ⇒ ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ≡ (**Q** \ **R**)
,! 8 (()E: 7) ¡

((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ≡ (**Q** \ **R**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**))
& ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ≡ (**Q** \ **R**)
,! 10 (&I: 3,9) ¡

(((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**))
& ((**P** \ **R**) ∪ (**Q** \ **R**)) ≡ (**Q** \ **R**)
⇒ ((**P** ∪ **Q**) \ **R**) ≡ (**Q** \ **R**))
,! 11 (∀E: C1.15) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((P \ R) ∪ (Q \ R))
& ((P \ R) ∪ (Q \ R)) ≡ (Q \ R)
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (Q \ R)
,! 12 (()E: 11) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ (Q \ R) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(Q \ R) ⊆ Q ,! 14 (∀E: P13) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ (Q \ R) & (Q \ R) ⊆ Q
,! 15 (&I: 13,14) ¡

(((P ∪ Q) \ R) ≡ (Q \ R) & (Q \ R) ⊆ Q
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q)
,! 16 (∀E: C1.29) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ (Q \ R) & (Q \ R) ⊆ Q
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q
,! 17 (()E: 16) ¡

((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

P ⊆ R ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(P ⊆ R ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀P∀Q∀R (P ⊆ R ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ Q) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **70.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀R (Q ⊆ R ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ P) ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

Q ⊆ R ,! 2 (Prem) ¡

(Q ⊆ R ⇒ ((Q ∪ P) \ R) ⊆ P) ,! 3 (∀E: P69) ¡

Q ⊆ R ⇒ ((Q ∪ P) \ R) ⊆ P ,! 4 (()E: 3) ¡

((Q ∪ P) \ R) ⊆ P ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R) ,! 6 (∀E: P68) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R) & ((Q ∪ P) \ R) ⊆ P
,! 7 (&I: 5,6) ¡

(((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R) & ((Q ∪ P) \ R) ⊆ P
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ⊆ P)
,! 8 (∀E: C1.29) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R) & ((Q ∪ P) \ R) ⊆ P

$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{P}$

,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{P}$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{P}$,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{P})$,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall P \forall Q \forall R (Q \subseteq R \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus R) \subseteq P)$! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **71.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cup Q) \setminus P) \subseteq Q$ ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \subseteq \mathbf{Q})$,! 2 (∀E: P69) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 3 (()E: 2) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}$,! 4 (∀E: C1.4) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 5 (⇒E: 3,4) ¡

$\forall P \forall Q ((P \cup Q) \setminus P) \subseteq Q$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **72.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q ((P \cup Q) \setminus Q) \subseteq P$ ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P})$,! 2 (∀E: P70) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 3 (()E: 2) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$,! 4 (∀E: C1.4) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 5 (⇒E: 3,4) ¡

$\forall P \forall Q ((P \cup Q) \setminus Q) \subseteq P$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **73.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R ((Q \cap R) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R) \cup Q))$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$,! 3 (∀E: P67) ¡

$(\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}\ )$,! 4 (∀E: P55) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}$,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}$,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
,! 7 (&I: 3,6) ¡

$(\ (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q})\ )$
,! 8 (∀E: C2.47) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q})$
,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q})$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q})$
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

$(\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{Q})\ )$
,! 12 (()I: 11) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ (\ (Q \cap R) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R) \cup Q)\ )$
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **74.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ (\ (P \cap R) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus R) \equiv (P \cup (Q \setminus R))\ )$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{P})\ )$
,! 3 (∀E: P73) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{P})$
,! 4 (()E: 3) ¡

$((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{P})$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R})$,! 6 (∀E: P68) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R})$
$\&\ ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{P})$
,! 7 (&I: 5,6) ¡

((Q \ R) ∪ P) ≡ (P ∪ (Q \ R)) ,! 8 (∀E: C2.16) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R)
& ((Q ∪ P) \ R) ≡ ((Q \ R) ∪ P)
& ((Q \ R) ∪ P) ≡ (P ∪ (Q \ R))
,! 9 (&I: 7,8) ¡

(((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R)
& ((Q ∪ P) \ R) ≡ ((Q \ R) ∪ P)
& ((Q \ R) ∪ P) ≡ (P ∪ (Q \ R))
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R)))
,! 10 (∀E: C1.21) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ ((Q ∪ P) \ R)
& ((Q ∪ P) \ R) ≡ ((Q \ R) ∪ P)
& ((Q \ R) ∪ P) ≡ (P ∪ (Q \ R))
⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R))
,! 11 (()E: 10) ¡

((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R)) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(P ∩ R) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R))
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((P ∩ R) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R)))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ R) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ R) ≡ (P ∪ (Q \ R)))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **75.** ¡

⊦ ∀P∀Q ((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ Q) ≡ P) ¡

P,Q ,! 1 (Prem) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

((P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ Q) ≡ (P ∪ (Q \ Q)))
,! 3 (∀E: P74) ¡

(P ∩ Q) ≡ ϕ ⇒ ((P ∪ Q) \ Q) ≡ (P ∪ (Q \ Q))
,! 4 (()E: 3) ¡

((P ∪ Q) \ Q) ≡ (P ∪ (Q \ Q)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(Q \ Q) ≡ ϕ ,! 6 (∀E: P51) ¡

((Q \ Q) ≡ ϕ ⇒ (P ∪ (Q \ Q)) ≡ P) ,! 7 (∀E: C5.22) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q})) \equiv \mathbf{P}$,! 8 (()E: 7) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q})) \equiv \mathbf{P}$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}))\ \&\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q})) \equiv \mathbf{P}$
,! 10 (&I: 5,9) ¡

$(\ ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}))\ \&\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q})) \equiv \mathbf{P}$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}\ )$
,! 11 (∀E: C1.15) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}))\ \&\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q})) \equiv \mathbf{P}$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$
,! 12 (()E: 11) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}\ )$,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall P \forall Q\ (\ (P \cap Q) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus Q) \equiv P\ )$
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **76.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q\ (\ (P \cap Q) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus P) \equiv Q\ )$ ¡

P,Q ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 2 (Prem) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi\ )$,! 3 (∀E: C3.17) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}\ )$,! 6 (∀E: P75) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P})$,! 9 (∀E: P68) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P})\ \&\ ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$
,! 10 (&I: 8,9) ¡

$(\ ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P})\ \&\ ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}\ )$
,! 11 (∀E C1.15) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P})$ & $((\mathbf{Q} \cup \mathbf{P}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$
,! 12 (()E: 11) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q}$,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{P}) \equiv \mathbf{Q})$,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall P \forall Q ((P \cap Q) \equiv \phi \Rightarrow ((P \cup Q) \setminus P) \equiv Q)$! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **77.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R ((P \cap Q) \equiv \phi$ & $(P \cup Q) \equiv R \Rightarrow (R \setminus Q) \equiv P)$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$ & $(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 3 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R}$,! 4 (&E: 2) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P})$,! 5 (∀E: P75) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 6 (()E: 5) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R}$ & $((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 8 (&I: 4,7) ¡

$((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R}$ & $((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$
$\Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P})$
,! 9 (∀E: P42) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R}$ & $((\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$
,! 10 (()E: 9) ¡

$(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$ & $(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$ & $(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P})$
,! 13 (()I: 12) ¡

$\forall P \forall Q \forall R ((P \cap Q) \equiv \phi$ & $(P \cup Q) \equiv R \Rightarrow (R \setminus Q) \equiv P)$
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **78.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & (P ∪ Q) ≡ R ⇒ (R \ P) ≡ Q) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ,! 4 (&E: 2) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q**) ,! 5 (∀E: P76) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **R** & ((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

((**P** ∪ **Q**) ≡ **R** & ((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q**
⇒ (**R** \ **P**) ≡ **Q**)
,! 9 (∀E: P42) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ **R** & ((**P** ∪ **Q**) \ **P**) ≡ **Q** ⇒ (**R** \ **P**) ≡ **Q**
,! 10 (()E: 9) ¡

(**R** \ **P**) ≡ **Q** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**R** \ **P**) ≡ **Q**
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ & (**P** ∪ **Q**) ≡ **R** ⇒ (**R** \ **P**) ≡ **Q**)
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) ≡ ϕ & (P ∪ Q) ≡ R ⇒ (R \ P) ≡ Q)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **79.** ¡

⊦ ∀P∀Q∀R (P \ (Q ∪ R)) ≡ ((P \ Q) \ R) ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

((**Q** ∪ **R**)^C) ≡ ((**Q**^{C}) ∩ (**R**^{C})) ,! 2 (∀E: C4.31) ¡

(((**Q** ∪ **R**)^C) ≡ ((**Q**^{C}) ∩ (**R**^{C}))
⇒ (**P** ∩ ((**Q** ∪ **R**)^C)) ≡ (**P** ∩ ((**Q**^{C}) ∩ (**R**^{C}))))
,! 3 (∀E: C3.35) ¡

((**Q** ∪ **R**)^C) ≡ ((**Q**^{C}) ∩ (**R**^{C}))
⇒ (**P** ∩ ((**Q** ∪ **R**)^C)) ≡ (**P** ∩ ((**Q**^{C}) ∩ (**R**^{C})))

,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 6 ($\forall$E: C3.50) ¡

$(\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
$\& \ ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
,! 7 (&I: 5,6) ¡

$(\ (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
$\& \ ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C)) \ )$
,! 8 ($\forall$E: C1.17) ¡

$(\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
$\& \ ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^C) \cap (\mathbf{R}^C)))$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C))$
,! 9 (()E: 8) ¡

$(\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})^C)) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C))$
,! 10 ($\Rightarrow$E: 7,9) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^C)) \cap (\mathbf{R}^C))$,! 11 (𝔻I: P1,10) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap (\mathbf{R}^C))$,! 12 (𝔻I: P1,11) ¡

$(\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \cup \mathbf{R})) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$,! 13 (𝔻I: P1,12) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \ (P \setminus (Q \cup R)) \equiv ((P \setminus Q) \setminus R)$! 14 ($\forall$I: 1,13) ¡

▯

! P80-P87 concern the intersection of a difference. ¡

! **80.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \ (\ R \subseteq Q \Rightarrow ((P \setminus Q) \cap R) \equiv \phi \ )$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \ )$,! 3 ($\forall$E: P29) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$,! 4 (()E: 3) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv \phi \ )$
,! 6 ($\forall$E: P23) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$
,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

$(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv \phi)$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \ (R \subseteq Q \Rightarrow ((P \setminus Q) \cap R) \equiv \phi)$! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **81.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \ ((P \setminus Q) \cap Q) \equiv \phi$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi)$,! 2 (∀E: P80) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 3 (()E: 2) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$,! 4 (∀E: C1.4) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$,! 5 (⇒E: 3,4) ¡

$\forall P \forall Q \ ((P \setminus Q) \cap Q) \equiv \phi$! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **82.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \ ((P \setminus Q) \cap R) \equiv (P \cap (R \setminus Q))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}))$,! 2 (∀E: C3.50) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}))$,! 3 (ⅅI: P1,2) ¡

$((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C}))$,! 4 (∀E: C3.14) ¡

$((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \ \& \ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}))$
,! 5 (&I: 3,4) ¡

$(\ ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C}))$
$\& \ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C}))) \ )$
,! 6 (∀E: C3.43) ¡

$((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})) \ \& \ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap ((\mathbf{Q}^{C}) \cap \mathbf{R}))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$,! 9 (ⅅI: P1,8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ ((P \setminus Q) \cap R) \equiv (P \cap (R \setminus Q))$! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! P83-P87 concern the difference of an intersection (as well as the intersection of a difference). ¡

! **83.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ ((P \setminus Q) \cap R) \boldsymbol{\equiv} ((P \cap R) \setminus Q)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$,! 2 (∀E: P82) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$,! 3 (ⅅE: P1,2) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$,! 4 (∀E: C3.50) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
$\&\ ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
,! 5 (&I: 3,4) ¡

$(\ ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
$\&\ ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C}))\ )$
,! 6 (∀E: C1.17) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
$\&\ ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C})) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \cap (\mathbf{Q}^{C})))$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C}))$
,! 7 (()E: 6) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q}^{C}))$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$,! 9 (ⅅI: P1,8) ¡

$\forall P \forall Q \forall R\ ((P \setminus Q) \cap R) \boldsymbol{\equiv} ((P \cap R) \setminus Q)$! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **84.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R\ (P \cap (R \setminus Q)) \boldsymbol{\equiv} ((P \cap R) \setminus Q)$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$,! 2 (∀E: P82) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$,! 3 (∀E: P83) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
$\& \; ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$
,! 4 (&I: 2,3) ¡

$(\; ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
$\& \; ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q}) \;)$
,! 5 (∀E: C1.19) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$
$\& \; ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$
$\Rightarrow (\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$
,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{P} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \; (P \cap (R \setminus Q)) \equiv ((P \cap R) \setminus Q)$! 8 (∀I: 1,7) ¡

∎

! **85.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \; ((P \cap Q) \setminus R) \subseteq ((P \setminus R) \cap (Q \setminus R))$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 2 (∀E: C3.10) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \;)$
,! 3 (∀E: P28) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$
,! 4 (()E: 3) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 6 (∀E: C3.11) ¡

$(\; (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \;)$
,! 7 (∀E: P28) ¡

$(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})$
,! 8 (()E: 7) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})$,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \; \& \; ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})$
,! 10 (&I: 5,9) ¡

$(\; ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \; \& \; ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \;)$
,! 11 (∀E: C3.12) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{R})$ & $((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$
,! 12 (()E: 11) ¡

$((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}))$,! 13 ($\Rightarrow$E: 10,12) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \; ((P \cap Q) \setminus R) \subseteq ((P \setminus R) \cap (Q \setminus R))$
! 14 ($\forall$I: 1,13) ¡

▯

! **86.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \; ((P \setminus R) \cap (Q \setminus R)) \subseteq ((P \cap Q) \setminus R)$ ¡

P,Q,R ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 ($\forall$E: P13) ¡

$(\; (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}) \;)$
,! 3 ($\forall$E: C3.32) ¡

$(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q})$
,! 4 (()E: 3) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q})$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$,! 6 ($\forall$E: P83) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$
& $((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q})$
,! 7 (&I: 5,6) ¡

$(\; ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$
& $((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q})$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \;)$
,! 8 ($\forall$E: C1.32) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}) \equiv ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$
& $((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q})$
$\Rightarrow ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$
,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \cap (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \subseteq ((\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R})$,! 10 ($\Rightarrow$E: 7,9) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \; ((P \setminus R) \cap (Q \setminus R)) \subseteq ((P \cap Q) \setminus R)$
! 11 ($\forall$I: 1,10) ¡

▯

! **87.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \; ((P \cap Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R) \cap (Q \setminus R))$ ¡

P,**Q**,**R** ,! 1 (Prem) ¡

((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ⊆ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ,! 2 (∀E: P85) ¡

((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ,! 3 (∀E: P86) ¡

((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ⊆ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**))
& ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**)
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ⊆ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**))
& ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**)
⇒ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)))
,! 5 (∀E: C1.15) ¡

((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ⊆ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**))
& ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ⊆ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**)
⇒ ((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**))
,! 6 (()E: 5) ¡

((**P** ∩ **Q**) \ **R**) ≡ ((**P** \ **R**) ∩ (**Q** \ **R**)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀P∀Q∀R ((P ∩ Q) \ R) ≡ ((P \ R) ∩ (Q \ R))
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! P88-P90 are propositions about multiple differences. ¡

! **88.** ¡

⊢ ∀P∀Q (P ⊆ Q ⇒ P **≡** (Q \ (Q \ P))) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ⊆ **Q** ⇒ ((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡** (**Q** \ (**Q** \ **P**)))
,! 3 (∀E: P66) ¡

P ⊆ **Q** ⇒ ((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡** (**Q** \ (**Q** \ **P**))
,! 4 (()E: 3) ¡

((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡** (**Q** \ (**Q** \ **P**)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**Q** \ **Q**) ≡ ϕ ,! 6 (∀E: P51) ¡

((**Q** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡ P**) ,! 7 (∀E: P21) ¡

(**Q** \ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡ P** ,! 8 (()E: 7) ¡

((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡ P** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡ P** & ((**Q** \ **Q**) ∪ **P**) **≡** (**Q** \ (**Q** \ **P**))

,! 10 (&I: 5,9) ¡

$(\ ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{P} \ \& \ ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}))$
$\Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P})) \ )$

,! 11 ($\forall$E: C1.19) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{P}) \equiv \mathbf{P} \ \& \ ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}))$
$\Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}))$

,! 12 (()E: 11) ¡

$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}))$,! 13 ($\Rightarrow$E: 10,12) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P}))$,! 14 ($\Rightarrow$I: 2,13) ¡

$(\ \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{P})) \ )$,! 15 (()I: 14) ¡

$\forall P \forall Q \ (\ P \subseteq Q \Rightarrow P \equiv (Q \setminus (Q \setminus P)) \ )$! 16 ($\forall$I: 1,15) ¡

▯

! **89.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \ ((P \setminus Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R)) \setminus Q)$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \cap (\mathbf{R}^C)) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{R}^C)) \setminus \mathbf{Q})$,! 2 ($\forall$E: P83) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \cap (\mathbf{R}^C)) \setminus \mathbf{Q})$,! 3 ($\mathbb{D}$I: P1,2) ¡

$((\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \setminus \mathbf{R}) \equiv ((\mathbf{P} \setminus \mathbf{R}) \setminus \mathbf{Q})$,! 4 ($\mathbb{D}$I: P1,3) ¡

$\forall P \forall Q \forall R \ ((P \setminus Q) \setminus R) \equiv ((P \setminus R)) \setminus Q)$! 5 ($\forall$I: 1,4) ¡

▯

! **90.** ¡

$\vdash \forall P \forall Q \forall R \ (\ R \subseteq Q \Rightarrow (P \setminus Q) \equiv ((P \setminus (Q \setminus R)) \setminus R) \ )$ ¡

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R})) \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \setminus \mathbf{R})$

,! 3 ($\forall$E: P79) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q} \ )$,! 4 ($\forall$E: P65) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}$,! 5 (()E: 4) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}$,! 6 ($\Rightarrow$E: 2,5) ¡

$((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R}) \equiv \mathbf{Q}$
$\& \ (\mathbf{P} \setminus ((\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}) \cup \mathbf{R})) \equiv ((\mathbf{P} \setminus (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R})) \setminus \mathbf{R})$

,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(((**Q** \ **R**) ∪ **R**) ≡ **Q**
& (**P** \ ((**Q** \ **R**) ∪ **R**)) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**)
⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**))
,! 8 (∀E: P44) ¡

((**Q** \ **R**) ∪ **R**) ≡ **Q**
& (**P** \ ((**Q** \ **R**) ∪ **R**)) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**)
⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**)
,! 9 (()E: 8) ¡

(**P** \ **Q**) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R** ⊆ **Q** ⇒ (**P** \ **Q**) ≡ ((**P** \ (**Q** \ **R**)) \ **R**))
,! 12 (()I: 11) ¡

∀P∀Q∀R (R ⊆ Q ⇒ (P \ Q) ≡ ((P \ (Q \ R)) \ R))
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯