!**CHAPTER 1**

DYADIC INCLUSION AND EQUIVALENCE¡

! This chapter introduces the notions of inclusion and equivalence of two-place (dyadic) predicates or relationship, which correspond exactly with the unary variety. Nonetheless, they are used less frequently, and the development in this chapter is accordingly sparer.

Remark that the proofs of this chapter do not contain any appeals to propositions of the second section. ¡

! **1.** ⊆ represents inclusion (of two-place predicates). ¡

$ ⊆ ; **R** ⊆ **S** ; ∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ **S**[x,y]) ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & R ⊆ S ⇒ S[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y**	,! 1 (Prem)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S**	,! 2 (Prem)	¡
R[**x**,**y**]	,! 3 (&E: 2)	¡
R ⊆ **S**	,! 4 (&E: 2)	¡
∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ **S**[x,y])	,! 5 ($E: P1,4)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 6 (∀E: 5)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 7 (()E: 6)	¡
S[**x**,**y**]	,! 8 (⇒E: 3,7)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 9 (⇒I: 2,8)	¡
(**R**[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 10 (()I: 9)	¡
∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & R ⊆ S ⇒ S[x,y])	! 11 (∀I: 1,10)	¡

□

! **3. Reflexivity of Dyadic Inclusion.**
¡

⊢ ∀R R ⊆ R ¡

R	,! 1 (Prem)	¡
x,**y**	,! 2 (Prem)	¡
R[**x**,**y**]	,! 3 (Prem)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]	,! 4 (⇒I: 3,3)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**])	,! 5 (()I: 4)	¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ **R**[x,y])	,! 6 (∀I: 5)	¡
R ⊆ **R**	,! 7 ($I: P1,5)	¡
∀R R ⊆ R	! 8 (∀I: 1,7)	¡

□

! **4. Transitivity of Dyadic Inclusion.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ⊆ S & S ⊆ T ⇒ R ⊆ T) ¡

R,**S**,**T**	,! 1 (Prem)	¡
R ⊆ **S** & **S** ⊆ **T**	,! 2 (Prem)	¡
R ⊆ **S**	,! 3 (&E: 2)	¡
∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ **S**[x,y])	,! 4 ($E: P1,3)	¡
S ⊆ **T**	,! 5 (&E: 2)	¡
∀x∀y (**S**[x,y] ⇒ **T**[x,y])	,! 6 ($E: P1,3)	¡
x,**y**	,! 7 (Prem)	¡
R[**x**,**y**]	,! 8 (Prem)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 9 (∀E: 4)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 10 (()E: 9)	¡
S[**x**,**y**]	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
(**S**[**x**,**y**] ⇒ **T**[**x**,**y**])	,! 12 (∀E: 6)	¡
S[**x**,**y**] ⇒ **T**[**x**,**y**]	,! 13 (()E: 12)	¡
T[**x**,**y**]	,! 14 (⇒E: 11,13)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **T**[**x**,**y**]	,! 15 (⇒I: 8,14)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **T**[**x**,**y**])	,! 16 (()I: 15)	¡
∀x∀y(**R**[x,y] ⇒ **T**[x,y])	,! 17 (∀I: 7,16)	¡
R ⊆ **T**	,! 18 ($I: P1,17)	¡
R ⊆ **S** & **S** ⊆ **T** ⇒ **R** ⊆ **T**	,! 19 (⇒I: 2,18)	¡
(**R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **T** ⇒ **R** ⊆ **T**)	,! 20 (()I: 19)	¡
∀R∀S∀T (R ⊆ S & S ⊆ T ⇒ R ⊆ T)	! 21 (∀I: 1,20)	¡

▯

! **5.** ≣ represents equivalence (of two-place predicates). ¡

$ ≣ ; R ≣ S ; ∀x∀y(R[x,y] ⇔ S[x,y]) ¡

! **6. Fundmantal Proposition of Dyadic Equivalence, First Half.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ⊆ S & S ⊆ R ⇒ R ≣ S) ¡

R,**S**	,! 1 (Prem)	¡
R ⊆ **S** & **S** ⊆ **R**	,! 2 (Prem)	¡
R ⊆ **S**	,! 3 (&E: 2)	¡
∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ **S**[x,y])	,! 4 ($E: P1,3)	¡
S ⊆ **R**	,! 5 (&E: 2)	¡
∀x∀y (**S**[x,y] ⇒ **R**[x,y])	,! 6 ($E: P1,3)	¡
x,**y**	,! 7 (Prem)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 8 (∀E: 4)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 9 (()E: 8)	¡
(**S**[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**])	,! 10 (∀E: 6)	¡
S[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]	,! 11 (()E: 10)	¡
R[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**]	,! 12 (⇔I: 9,11)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**])	,! 13 (()I: 12)	¡
∀x∀y (**R**[x,y] ⇔ **S**[x,y])	,! 14 (∀I: 13)	¡
R ≣ **S**	,! 15 ($I: P5,14)	¡
R ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ⇒ **R** ≣ **S**	,! 16 (⇒I: 2,15)	¡
(**R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ⇒ **R** ≣ **S**)	,! 17 (()I: 16)	¡
∀R∀S (R ⊆ S & S ⊆ R ⇒ R ≣ S)	! 18 (∀I: 1,17)	¡

▯

! **7. Reflexivity of Dyadic Equivalence.** ¡

⊢ ∀R R ≣ R ¡

R	,! 1 (Prem)	¡
R ⊆ **R**	,! 2 (∀E: P3)	¡

R ⊆ **R** & **R** ⊆ **R** ,! 3 (&I: 2,2) ¡

(**R** ⊆ **R** & **R** ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ **R**) ,! 4 (∀E: P6) ¡

R ⊆ **R** & **R** ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ **R** ,! 5 (()E: 4) ¡

R ≡ **R** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∀R R ≡ R ! 7 (∀I: 1,6) ¡

□

! **8. Symmetry of Dyadic Equivalence.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ≡ S ⇒ S ≡ R) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ **S** ,! 2 (Prem) ¡

∀x∀y(**R**[x,y] ⇔ **S**[x,y]) ,! 3 ($E: P5,2) ¡

x,**y** ,! 4 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**]) ,! 5 (∀E: 3) ¡

R[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**] ,! 6 (()E: 5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**] ,! 7 (⇔E: 6) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ,! 8 (⇔E: 6) ¡

S[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ,! 9 (⇔I: 7,8) ¡

(**S**[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀x∀y(**S**[x,y] ⇔ **R**[x,y]) ,! 11 (∀I: 4,10) ¡

S ≡ **R** ,! 12 ($I: P5,11) ¡

R ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **R** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(**R** ≡ **S** ⇒ **S** ≡ **R**) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀R∀S (R ≡ S ⇒ S ≡ R) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **9. Fundmantal Proposition of Dyadic Equivalence, Second Half, First Part.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ≡ S ⇒ R ⊆ S) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S**	,! 2 (Prem)	¡
∀x∀y(**R**[x,y] ⇔ **S**[x,y])	,! 3 ($E: P5,2)	¡
x,**y**	,! 4 (Prem)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**])	,! 5 (∀E: 3)	¡
R[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**]	,! 6 (()E: 5)	¡
R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 7 (⇔E: 6)	¡
(**R**[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 8 (()I: 7)	¡
∀x∀y(**R**[x,y] ⇒ **S**[x,y])	,! 9 (∀I: 4,8)	¡
R ⊆ **S**	,! 10 ($I: P1,9)	¡
R ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S**	,! 11 (⇒I: 2,10)	¡
(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S**)	,! 12 (()I: 11)	¡
∀R∀S (R ≣ S ⇒ R ⊆ S)	! 13 (∀I: 1,12)	¡

□

! **10. Fundmantal Proposition of Dyadic Equivalence, Second Half, Second Part.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ≣ S ⇒ S ⊆ R) ¡

R,**S**	,! 1 (Prem)	¡
R ≣ **S**	,! 2 (Prem)	¡
(**R** ≣ **S** ⇒ **S** ≣ **R**)	,! 3 (∀E: P8)	¡
R ≣ **S** ⇒ **S** ≣ **R**	,! 4 (()E: 3)	¡
S ≣ **R**	,! 5 (⇒E: 2,4)	¡
(**S** ≣ **R** ⇒ **S** ⊆ **R**)	,! 6 (∀E: P9)	¡
S ≣ **R** ⇒ **S** ⊆ **R**	,! 7 (()E: 6)	¡
S ⊆ **R**	,! 8 (⇒E: 5,7)	¡
R ≣ **S** ⇒ **S** ⊆ **R**	,! 9 (⇒I: 2,8)	¡
(**R** ≣ **S** ⇒ **S** ⊆ **R**)	,! 10 (()I: 9)	¡
∀R∀S (R ≣ S ⇒ S ⊆ R)	! 11 (∀I: 1,10)	¡

□

! **11. Fundmantal Proposition of Dyadic Equivalence, Second Half.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R) ¡

R,S	,! 1 (Prem)	¡
R ≣ S	,! 2 (Prem)	¡
(**R ≣ S ⇒ R ⊆ S**)	,! 3 (∀E: P9)	¡
R ≣ S ⇒ R ⊆ S	,! 4 (()E: 3)	¡
R ⊆ S	,! 5 (⇒E: 2,4)	¡
(**R ≣ S ⇒ S ⊆ R**)	,! 6 (∀E: P10)	¡
R ≣ S ⇒ S ⊆ R	,! 7 (()E: 6)	¡
S ⊆ R	,! 8 (⇒E: 2,7)	¡
R ⊆ S & S ⊆ R	,! 9 (&I: 5,8)	¡
R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R	,! 10 (⇒I: 2,9)	¡
(**R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R**)	,! 11 (()I: 10)	¡
∀R∀S (R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R)	! 12 (∀I: 1,11)	¡

□

! **12. Fundmantal Proposition of Dyadic Equivalence.** ¡

⊢ ∀R∀S (R ⊆ S & S ⊆ R ⇔ R ≣ S) ¡

R,S	,! 1 (Prem)	¡
(**R ⊆ S & S ⊆ R ⇒ R ≣ S**)	,! 2 (∀E: P6)	¡
R ⊆ S & S ⊆ R ⇒ R ≣ S	,! 3 (()E: 2)	¡
(**R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R**)	,! 4 (∀E: P11)	¡
R ≣ S ⇒ R ⊆ S & S ⊆ R	,! 5 (()E: 4)	¡
R ⊆ S & S ⊆ R ⇔ R ≣ S	,! 6 (⇔I: 3,5)	¡
(**R ⊆ S & S ⊆ R ⇔ R ≣ S**)	,! 7 (()I: 6)	¡
∀R∀S (R ⊆ S & S ⊆ R ⇔ R ≣ S)	! 8 (∀I: 1,7)	¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T)		¡
R,S,T	,! 1 (Prem)	¡
R ⊆ S & S ≡ T	,! 2 (Prem)	¡
R ⊆ S	,! 3 (&E: 2)	¡
S ≡ T	,! 4 (&E: 2)	¡
(**S ≡ T ⇒ S ⊆ T**)	,! 5 (∀E: P9)	¡
S ≡ T ⇒ S ⊆ T	,! 6 (()E: 5)	¡
S ⊆ T	,! 7 (⇒E: 6)	¡
R ⊆ S & S ⊆ T	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**R ⊆ S & S ⊆ T ⇒ R ⊆ T**)	,! 9 (∀E: P4)	¡
R ⊆ S & S ⊆ T ⇒ R ⊆ T	,! 10 (()E: 9)	¡
R ⊆ T	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡
(**R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T**)	,! 13 (()I: 12)	¡
∀R∀S∀T (R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T)	! 14 (∀I: 1,13)	¡

□

! **14.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ⊆ S & T ≡ S ⇒ R ⊆ T)		¡
R,S,T	,! 1 (Prem)	¡
R ⊆ S & T ≡ S	,! 2 (Prem)	¡
R ⊆ S	,! 3 (&E: 2)	¡
T ≡ S	,! 4 (&E: 2)	¡
(**T ≡ S ⇒ S ≡ T**)	,! 5 (∀E: P8)	¡
T ≡ S ⇒ S ≡ T	,! 6 (()E: 5)	¡
S ≡ T	,! 7 (⇒E: 6)	¡
R ⊆ S & S ≡ T	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T**)	,! 9 (∀E: P13)	¡
R ⊆ S & S ≡ T ⇒ R ⊆ T	,! 10 (()E: 9)	¡

R ⊆ **T** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ⊆ **S** & **T** ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **T** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R** ⊆ **S** & **T** ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **T**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀T (R ⊆ S & T ≡ S ⇒ R ⊆ T) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **15. Transitivity of Dyadic Equivalence.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ≡ S & S ≡ T ⇒ R ≡ T) ¡

R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ **S** & **S** ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

R ≡ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R** ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R**) ,! 4 (∀E: P11) ¡

R ≡ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 5 (()E: 4) ¡

R ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R ⊆ **S** ,! 7 (&E: 6) ¡

S ⊆ **R** ,! 8 (&E: 6) ¡

S ≡ **T** ,! 9 (&E: 2) ¡

(**S** ≡ **T** ⇒ **S** ⊆ **T** & **T** ⊆ **S**) ,! 10 (∀E: P11) ¡

S ≡ **T** ⇒ **S** ⊆ **T** & **T** ⊆ **S** ,! 11 (()E: 10) ¡

S ⊆ **T** & **T** ⊆ **S** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

S ⊆ **T** ,! 13 (&E: 12) ¡

T ⊆ **S** ,! 14 (&E: 12) ¡

R ⊆ **S** & **S** ⊆ **T** ,! 15 (&I: 7,13) ¡

(**R** ⊆ **S** & **S** ⊆ **T** ⇒ **R** ⊆ **T**) ,! 16 (∀E: P4) ¡

R ⊆ **S** & **S** ⊆ **T** ⇒ **R** ⊆ **T** ,! 17 (()E: 16) ¡

R ⊆ **T** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

T ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ,! 19 (&I: 8,14) ¡

(**T** ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ⇒ **T** ⊆ **R**) ,! 20 (∀E: P4) ¡

T ⊆ **S** & **S** ⊆ **R** ⇒ **T** ⊆ **R** ,! 21 (()E: 20) ¡

T ⊆ **R** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

R ⊆ **T** & **T** ⊆ **R** ,! 23 (&I: 18,22) ¡

(**R** ⊆ **T** & **T** ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ **T**) ,! 24 (∀E: P6) ¡

R ⊆ **T** & **T** ⊆ **R** ⇒ **R** ≡ **T** ,! 25 (()E: 24) ¡

R ≡ **T** ,! 26 (⇒E: 24,25) ¡

R ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **R** ≡ **T** ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(**R** ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **R** ≡ **T**) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀R∀S∀T (R ≡ S & S ≡ T ⇒ R ≡ T) ! 29 (∀I: 1,28) ¡

□

! P16-P18 are applications of dyadic symmetry to transtivity. ¡

! **16. Applications of Dyadic Symmetry to Transitivity, n1.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ≡ S & S ≡ T ⇒ T ≡ R) ¡

R,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

R ≡ **S** & **S** ≡ **T** ,! 2 (Prem) ¡

(**R** ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **R** ≡ **T**) ,! 3 (∀E: P15) ¡

R ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **R** ≡ **T** ,! 4 (()E: 3) ¡

R ≡ **T** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**R** ≡ **T** ⇒ **T** ≡ **R**) ,! 6 (∀E: P8) ¡

R ≡ **T** ⇒ **T** ≡ **R** ,! 7 (()E: 6) ¡

T ≡ **R** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

R ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **T** ≡ **R** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**R** ≡ **S** & **S** ≡ **T** ⇒ **T** ≡ **R**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀S∀T (R ≡ S & S ≡ T ⇒ T ≡ R) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **17. Applications of Dyadic Symmetry to Transitivity, n2.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ≡ S & T ≡ S ⇒ R ≡ T) ¡

R,S,T	,! 1 (Prem)	¡
R ≡ S & **T ≡ S**	,! 2 (Prem)	¡
R ≡ S	,! 3 (&E: 2)	¡
T ≡ S	,! 4 (&E: 2)	¡
(**T ≡ S** ⇒ **S ≡ T**)	,! 5 (∀E: P8)	¡
T ≡ S ⇒ **S ≡ T**	,! 6 (()E: 5)	¡
S ≡ T	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
R ≡ S & **S ≡ T**	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**R ≡ S** & **S ≡ T** ⇒ **R ≡ T**)	,! 9 (∀E: P15)	¡
R ≡ S & **S ≡ T** ⇒ **R ≡ T**	,! 10 (()E: 9)	¡
R ≡ T	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
R ≡ S & **T ≡ S** ⇒ **R ≡ T**	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡
(**R ≡ S** & **T ≡ S** ⇒ **R ≡ T**)	,! 13 (()I: 12)	¡
∀R∀S∀T (R ≡ S & T ≡ S ⇒ R ≡ T)	! 14 (∀I: 1,13)	¡

□

! **18. Applications of Dyadic Symmetry to Transitivity, n3.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T (R ≡ S & R ≡ T ⇒ S ≡ T) ¡

R,S,T	,! 1 (Prem)	¡
R ≡ S & **R ≡ T**	,! 2 (Prem)	¡
R ≡ T	,! 3 (&E: 2)	¡
R ≡ S	,! 4 (&E: 2)	¡
(**R ≡ S** ⇒ **S ≡ R**)	,! 5 (∀E: P8)	¡
R ≡ S ⇒ **S ≡ R**	,! 6 (()E: 5)	¡
S ≡ R	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
S ≡ R & **R ≡ T**	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**S ≡ R** & **R ≡ T** ⇒ **S ≡ T**)	,! 9 (∀E: P15)	¡
S ≡ R & **R ≡ T** ⇒ **S ≡ T**	,! 10 (()E: 9)	¡

S ≣ T ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ≣ S & **R ≣ T** ⇒ **S ≣ T** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R ≣ S** & **R ≣ T** ⇒ **S ≣ T**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀T (R ≣ S & R ≣ T ⇒ S ≣ T) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **19. 3-Way Transitivity of Dyadic Equivalence.** ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U (R ≣ S & S ≣ T & T ≣ U ⇒ R ≣ U) ¡

R,S,T,U ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ S & **S ≣ T** & **T ≣ U** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ S & **S ≣ T** ,! 3 (&I: 3,4) ¡

(**R ≣ S** & **S ≣ T** ⇒ **R ≣ T**) ,! 4 (∀E: P15) ¡

R ≣ S & **S ≣ T** ⇒ **R ≣ T** ,! 5 (()E: 4) ¡

R ≣ T ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

T ≣ U ,! 7 (&E: 2) ¡

R ≣ T & **T ≣ U** ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(**R ≣ T** & **T ≣ U** ⇒ **R ≣ U**) ,! 9 (∀E: P15) ¡

R ≣ T & **T ≣ U** ⇒ **R ≣ U** ,! 10 (()E: 9) ¡

R ≣ U ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ≣ S & **S ≣ T** & **T ≣ U** ⇒ **R ≣ U** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R ≣ S** & **S ≣ T** & **T ≣ U** ⇒ **R ≣ U**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀T∀U (R ≣ S & S ≣ T & T ≣ U ⇒ R ≣ U)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **20.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & R ≣ S ⇒ S[x,y]) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

R[x,y] & **R ≣ S** ,! 2 (Prem) ¡

R[x,y] ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≣ **S**	,! 4 (&E: 2)	¡
(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S**)	,! 5 (∀E: P9)	¡
R ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S**	,! 6 (()E: 5)	¡
R ⊆ **S**	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S**	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**R**[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 9 (∀E: P2)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ⊆ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 10 (()E: 9)	¡
S[**x**,**y**]	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ≣ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡
(**R**[**x**,**y**] & **R** ≣ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 13 (()I: 12)	¡
∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & R ≣ S ⇒ S[x,y])	! 14 (∀I: 1,13)	¡

□

! **21.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & S ≣ R ⇒ S[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y**	,! 1 (Prem)	¡
R[**x**,**y**] & **S** ≣ **R**	,! 2 (Prem)	¡
R[**x**,**y**]	,! 3 (&E: 2)	¡
S ≣ **R**	,! 4 (&E: 2)	¡
(**S** ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S**)	,! 5 (∀E: P8)	¡
S ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S**	,! 6 (()E: 5)	¡
R ≣ **S**	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ≣ **S**	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**R**[**x**,**y**] & **R** ≣ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 9 (∀E: P20)	¡
R[**x**,**y**] & **R** ≣ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 10 (()E: 9)	¡
S[**x**,**y**]	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
R[**x**,**y**] & **S** ≣ **R** ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡
(**R**[**x**,**y**] & **S** ≣ **R** ⇒ **S**[**x**,**y**])	,! 13 (()I: 12)	¡
∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & S ≣ R ⇒ S[x,y])	! 14 (∀I: 1,13)	¡