!CHAPTER 10

COMPOSITION¡

! This chapter introduces the concept of composition. **x** bears the composition of two relationships **R** and **S**, written (**R** ∘ **S**), to **y** if and only if there is a **z** such that **x** bears **R** to **z** and **z** bears **S** to **y**. ¡

! **1.** ∘ represents composition. ¡

𝔻 ∘ ; (**R** ∘ **S**) ; ; {a,b : ∃z(**R**[a,z] & **S**[z,b])} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Composition.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((R ∘ S)[x,y] ⇔ ∃z(R[x,z] & S[z,y])) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y({a,b : ∃z(**R**[a,z] & **S**[z,b])}[x,y]
⇔ ∃z(**R**[x,z] & **S**[z,y]))
,! 2 (Pred) ¡

∀x∀y ((**R** ∘ **S**)[x,y] ⇔ ∃z(**R**[x,z] & **S**[z,y]))
,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R ∘ S)[x,y] ⇔ ∃z(R[x,z] & S[z,y]))
! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Composition, First Half.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y ((R ∘ S)[x,y] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,y])) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**])) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ,! 3 (()E: 2) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**])) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀S∀x∀y ((R ∘ S)[x,y] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,y]))
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Composition, Second Half.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (∃z(R[x,z] & S[z,y]) ⇒ (R ∘ S)[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**])) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ,! 3 (()E: 2) ¡

∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**])
,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀S∀x∀y (∃z(R[x,z] & S[z,y]) ⇒ (R ∘ S)[x,y])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** P5 is usally more convenient to use than P4. ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y∀z (R[x,z] & S[z,y] ⇒ (R ∘ S)[x,y]) ¡

R,**S**,**x**,**y**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

R[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**]) ,! 3 (()I: 2) ¡

∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ,! 4 (∃I: 3) ¡

(∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**])
,! 5 (∀E: P4) ¡

∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R**[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**y**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀x∀y∀z (R[x,z] & S[z,y] ⇒ (R ∘ S)[x,y])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **6.** Composition maintains inclusion. ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U (R ⫅ T & S ⫅ U ⇒ (R ∘ S) ⫅ (T ∘ U)) ¡

R,**S**,**T**,**U** ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ,! 2 (Prem) ¡

R ⫅ **T** ,! 3 (&E: 2) ¡

S ⫅ **U** ,! 4 (&E: 2) ¡

x,**y** ,! 5 (Prem) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 6 (Prem) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]))
,! 7 (∀E: P3) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**])
,! 8 (()E: 7) ¡

∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**R**[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**]) ,! 10 (∃E: 9) ¡

R[**x**,**z**] & **S**[**z**,**y**] ,! 11 (()E: 10) ¡

R[**x**,**z**] ,! 12 (&E: 11) ¡

R[**x**,**z**] & **R** ⫅ **T** ,! 13 (&I: 3,12) ¡

(**R**[**x**,**z**] & **R** ⫅ **T** ⇒ **T**[**x**,**z**]) ,! 14 (∀E: C1.2) ¡

R[**x**,**z**] & **R** ⫅ **T** ⇒ **T**[**x**,**z**] ,! 15 (()E: 14) ¡

T[**x**,**z**] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

S[**z**,**y**] ,! 17 (&E: 11) ¡

S[**z**,**y**] & **S** ⫅ **U** ,! 18 (&I: 4,17) ¡

(**S**[**z**,**y**] & **S** ⫅ **U** ⇒ **U**[**z**,**y**]) ,! 19 (∀E: C1.2) ¡

S[**z**,**y**] & **S** ⫅ **U** ⇒ **U**[**z**,**y**] ,! 20 (()E: 19) ¡

U[**z**,**y**] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

T[**x**,**z**] & **U**[**z**,**y**] ,! 22 (&I: 16,21) ¡

(**T**[**x**,**z**] & **U**[**z**,**y**] ⇒ (**T** ∘ **U**)[**x**,**y**])
,! 23 (∀E: P5) ¡

T[**x**,**z**] & **U**[**z**,**y**] ⇒ (**T** ∘ **U**)[**x**,**y**] ,! 24 (()E: 23) ¡

(**T** ∘ **U**)[**x**,**y**] ,! 25 (⇒E: 23,24) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ (**T** ∘ **U**)[**x**,**y**] ,! 26 (⇒I: 6,25) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ (**T** ∘ **U**)[**x**,**y**]) ,! 27 (()I: 26) ¡

∀x∀y ((**R** ∘ **S**)[x,y] ⇒ (**T** ∘ **U**)[x,y]) ,! 28 (∀I: 5,27) ¡

(**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**) ,! 29 (𝕊I: C1.1,28) ¡

R ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ⇒ (**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**) ,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(**R** ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ⇒ (**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**))
,! 31 (()I: 30) ¡

∀R∀S∀T∀U (R ⫅ T & S ⫅ U ⇒ (R ∘ S) ⫅ (T ∘ U))
! 32 (∀I: 1,31) ¡

▯

! **7.** Composition maintains equivalence, n1. ¡

⊢ ∀R∀S∀T∀U (R ≣ T & S ≣ U ⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U)) ¡

R,**S**,**T**,**U** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **T** & **S** ≣ **U** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **T** ,! 3 (&I: 2) ¡

(**R** ≣ **T** ⇒ **R** ⫅ **T** & **T** ⫅ **R**) ,! 4 (∀E: C1.11) ¡

R ≣ **T** ⇒ **R** ⫅ **T** & **T** ⫅ **R** ,! 5 (()E: 4) ¡

R ⫅ **T** & **T** ⫅ **R** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R ⫅ **T** ,! 7 (&E: 6) ¡

T ⫅ **R** ,! 8 (&E: 6) ¡

S ≣ **U** ,! 9 (&E: 2) ¡

(**S** ≣ **U** ⇒ **S** ⫅ **U** & **U** ⫅ **S**) ,! 10 (∀E: C1.11) ¡

S ≣ **U** ⇒ **S** ⫅ **U** & **U** ⫅ **S** ,! 11 (()E: 10) ¡

S ⫅ **U** & **U** ⫅ **S** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

S ⫅ **U** ,! 13 (&E: 12) ¡

U ⫅ **S** ,! 14 (&E: 12) ¡

R ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ,! 15 (&I: 7,13) ¡

(**R** ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ⇒ (**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**))
,! 16 (∀E: P6) ¡

R ⫅ **T** & **S** ⫅ **U** ⇒ (**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**) ,! 17 (()E: 16) ¡

(**R** ∘ **S**) ⫅ (**T** ∘ **U**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

T ⫅ R & U ⫅ S ,! 19 (&I: 8,14) ¡

(T ⫅ R & U ⫅ S ⇒ (T ∘ U) ⫅ (R ∘ S))
,! 20 (∀E: P6) ¡

T ⫅ R & U ⫅ S ⇒ (T ∘ U) ⫅ (R ∘ S) ,! 21 (()E: 20) ¡

(T ∘ U) ⫅ (R ∘ S) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(R ∘ S) ⫅ (T ∘ U) & (T ∘ U) ⫅ (R ∘ S)
,! 23 (&I: 18,22) ¡

((R ∘ S) ⫅ (T ∘ U) & (T ∘ U) ⫅ (R ∘ S)
⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U))
,! 24 (∀E: C1.6) ¡

(R ∘ S) ⫅ (T ∘ U) & (T ∘ U) ⫅ (R ∘ S) ⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U)
,! 25 (()E: 24) ¡

(R ∘ S) ≣ (T ∘ U) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

R ≣ T & S ≣ U ⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U) ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(R ≣ T & S ≣ U ⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U)) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀R∀S∀T∀U (R ≣ T & S ≣ U ⇒ (R ∘ S) ≣ (T ∘ U))
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **8.** Composition maintains equivalence, n2. ¡

⊦ ∀R∀S∀T (S ≣ T ⇒ (R ∘ S) ≣ (R ∘ T)) ¡

R,S,T ,! 1 (Prem) ¡

S ≣ T ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ R ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

R ≣ R & S ≣ T ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(R ≣ R & S ≣ T ⇒ (R ∘ S) ≣ (R ∘ T))
,! 5 (∀E: P7) ¡

R ≣ R & S ≣ T ⇒ (R ∘ S) ≣ (R ∘ T) ,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∘ S) ≣ (R ∘ T) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

S ≣ T ⇒ (R ∘ S) ≣ (R ∘ T) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**S** ≣ **T** ⇒ (**R** ∘ **S**) ≣ (**R** ∘ **T**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T (S ≣ T ⇒ (R ∘ S) ≣ (R ∘ T)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **9.** Composition maintains equivalence, n3. ¡

⊦ ∀R∀S∀T (S ≣ T ⇒ (S ∘ R) ≣ (T ∘ R)) ¡

R,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

S ≣ **T** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **R** ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

S ≣ **T** & **R** ≣ **R** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**S** ≣ **T** & **R** ≣ **R** ⇒ (**S** ∘ **R**) ≣ (**T** ∘ **R**))
,! 5 (∀E: P7) ¡

S ≣ **T** & **R** ≣ **R** ⇒ (**S** ∘ **R**) ≣ (**T** ∘ **R**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**S** ∘ **R**) ≣ (**T** ∘ **R**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

S ≣ **T** ⇒ (**S** ∘ **R**) ≣ (**T** ∘ **R**) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**S** ≣ **T** ⇒ (**S** ∘ **R**) ≣ (**T** ∘ **R**)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀T (S ≣ T ⇒ (S ∘ R) ≣ (T ∘ R)) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **10. Associativity of Composition (Around Equivalence).**
¡

⊦ ∀R∀S∀T (R ∘ (S ∘ T)) ≣ ((R ∘ S) ∘ T) ¡

R,**S**,**T** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

((**R** ∘ (**S** ∘ **T**))[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & (**S** ∘ **T**)[z,**y**]))
,! 3 (∀E: P2) ¡

(**R** ∘ (**S** ∘ **T**))[**x**,**y**] ⇔ ∃z(**R**[**x**,z] & (**S** ∘ **T**)[z,**y**])
,! 4 (()E: 3) ¡

(((**R** ∘ **S**) ∘ **T**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z((**R** ∘ **S**)[**x**,z] & **T**[z,**y**]))
,! 5 (∀E: P2) ¡

((**R** ∘ **S**) ∘ **T**)[**x**,**y**] ⇔ ∃z((**R** ∘ **S**)[**x**,z] & **T**[z,**y**])
,! 6 (()E: 5) ¡

(R ∘ (S ∘ T))[x,y] ,! 7 (Prem) ¡

(R ∘ (S ∘ T))[x,y] ⇒ ∃z(R[x,z] & (S ∘ T)[z,y])
,! 8 (⇔E: 4) ¡

∃z(R[x,z] & (S ∘ T)[z,y]) ,! 9 (⇒E: 7,8) ¡

(R[x,z] & (S ∘ T)[z,y]) ,! 10 (∃E: 9) ¡

R[x,z] & (S ∘ T)[z,y] ,! 11 (()E: 10) ¡

R[x,z] ,! 12 (&E: 11) ¡

(S ∘ T)[z,y] ,! 13 (&E: 11) ¡

((S ∘ T)[z,y] ⇒ ∃z(S[z,z] & T[z,y]))
,! 14 (∀E: P3) ¡

(S ∘ T)[z,y] ⇒ ∃z(S[z,z] & T[z,y]) ,! 15 (()E: 14) ¡

∃z(S[z,z] & T[z,y]) ,! 16 (⇒E: 15) ¡

(S[z,v] & T[v,y]) ,! 17 (∃E: 16) ¡

S[z,v] & T[v,y] ,! 18 (()E: 17) ¡

S[z,v] ,! 19 (&E: 18) ¡

T[v,y] ,! 20 (&E: 18) ¡

R[x,z] & S[z,v] ,! 21 (&I: 12,19) ¡

(R[x,z] & S[z,v] ⇒ (R ∘ S)[x,v]) ,! 22 (∀E: P5) ¡

R[x,z] & S[z,v] ⇒ (R ∘ S)[x,v] ,! 23 (()E: 22) ¡

(R ∘ S)[x,v] ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(R ∘ S)[x,v] & T[v,y] ,! 25 (&I: 20,24) ¡

((R ∘ S)[x,v] & T[v,y]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∃z((R ∘ S)[x,z] & T[z,y]) ,! 27 (∃I: 26) ¡

∃z((R ∘ S)[x,z] & T[z,y]) ⇒ ((R ∘ S) ∘ T)[x,y]
,! 28 (⇔E: 6) ¡

((R ∘ S) ∘ T)[x,y] ,! 29 (⇒E: 27,28) ¡

(R ∘ (S ∘ T))[x,y] ⇒ ((R ∘ S) ∘ T)[x,y]
,! 30 (⇒I: 7,29) ¡

((R ∘ S) ∘ T)[x,y] ,! 31 (Prem) ¡

((R ∘ S) ∘ T)[x,y] ⇒ ∃z((R ∘ S)[x,z] & T[z,y])
,! 32 (⇔E: 6) ¡

∃z((R ∘ S)[x,z] & T[z,y]) ,! 33 (⇒E: 31,32) ¡

((R ∘ S)[x,z] & T[z,y]) ,! 34 (∃E: 33) ¡

(R ∘ S)[x,z] & T[z,y] ,! 35 (()E: 34) ¡

(R ∘ S)[x,z] ,! 36 (&E: 35) ¡

T[z,y] ,! 37 (&E: 35) ¡

((R ∘ S)[x,z] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,z]))
,! 38 (∀E: P3) ¡

(R ∘ S)[x,z] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,z]) ,! 39 (()E: 38) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,z]) ,! 40 (⇒E: 36,39) ¡

(R[x,v] & S[v,z]) ,! 41 (∃E: 40) ¡

R[x,v] & S[v,z] ,! 42 (()E: 41) ¡

R[x,v] ,! 43 (&E: 42) ¡

S[v,z] ,! 44 (&E: 42) ¡

S[v,z] & T[z,y] ,! 45 (&I: 37,44) ¡

(S[v,z] & T[z,y] ⇒ (S ∘ T)[v,y]) ,! 46 (∀E: P5) ¡

S[v,z] & T[z,y] ⇒ (S ∘ T)[v,y] ,! 47 (()E: 46) ¡

(S ∘ T)[v,y] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

R[x,v] & (S ∘ T)[v,y] ,! 49 (&I: 43,48) ¡

(R[x,v] & (S ∘ T)[v,y]) ,! 50 (()I: 49) ¡

∃z(R[x,z] & (S ∘ T)[z,y]) ,! 51 (∃I: 50) ¡

∃z(R[x,z] & (S ∘ T)[z,y]) ⇒ (R ∘ (S ∘ T))[x,y]
,! 52 (⇔E: 4) ¡

(R ∘ (S ∘ T))[x,y] ,! 53 (⇒E: 51,52) ¡

((R ∘ S) ∘ T)[x,y] ⇒ (R ∘ (S ∘ T))[x,y]
,! 54 (⇒I: 31,53) ¡

(R ∘ (S ∘ T))[x,y] ⇔ ((R ∘ S) ∘ T)[x,y]
,! 55 (⇔I: 30,54) ¡

((R ∘ (S ∘ T))[x,y] ⇔ ((R ∘ S) ∘ T)[x,y])
,! 56 (()I: 55) ¡

∀x∀y ((R ∘ (S ∘ T))[x,y] ⇔ ((R ∘ S) ∘ T)[x,y])
,! 57 (∀I: 2,56) ¡

(R ∘ (S ∘ T)) ≣ ((R ∘ S) ∘ T) ,! 58 (𝕊I: C1.5,57) ¡

∀R∀S∀T (R ∘ (S ∘ T)) ≣ ((R ∘ S) ∘ T) ! 59 (∀I: 1,58) ¡

□

! **11.** The inverse of a composition is the composition of the inverses (in inverse order). ¡

⊦ ∀R∀S ((R ∘ S)*) ≣ ((S*) ∘ (R*)) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

x,y ,! 2 (Prem) ¡

(((R ∘ S)*)[x,y] ⇔ (R ∘ S)[y,x]) ,! 3 (∀E: C3.2) ¡

((R ∘ S)*)[x,y] ⇔ (R ∘ S)[y,x] ,! 4 (()E: 3) ¡

((R ∘ S)[y,x] ⇔ ∃z(R[y,z] & S[z,x]))
,! 5 (∀E: P2) ¡

(R ∘ S)[y,x] ⇔ ∃z(R[y,z] & S[z,x]) ,! 6 (()E: 5) ¡

(((S*) ∘ (R*))[x,y] ⇔ ∃z((S*)[x,z] & (R*)[z,y]))
,! 7 (∀E: P2) ¡

((S*) ∘ (R*))[x,y] ⇔ ∃z((S*)[x,z] & (R*)[z,y])
,! 8 (()E: 7) ¡

((R ∘ S)*)[x,y] ,! 9 (Prem) ¡

((R ∘ S)*)[x,y] ⇒ (R ∘ S)[y,x] ,! 10 (⇔E: 4) ¡

(R ∘ S)[y,x] ,! 11 (⇒E: 9,10) ¡

(R ∘ S)[y,x] ⇒ ∃z(R[y,z] & S[z,x]) ,! 12 (⇔E: 6) ¡

∃z(R[y,z] & S[z,x]) ,! 13 (⇒E: 11,12) ¡

(R[y,z] & S[z,x]) ,! 14 (∃E: 13) ¡

R[y,z] & S[z,x] ,! 15 (()E: 14) ¡

R[y,z] ,! 16 (&E: 15) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}])$,! 17 (∀E: C3.4) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 18 (()E: 17) ¡

$(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}]$,! 20 (&E: 15) ¡

$(\mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}])$,! 21 (∀E: C3.4) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 22 (()E: 21) ¡

$(\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

$(\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ & $(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 24 (&I: 19,23) ¡

$((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ & $(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}])$,! 25 (()I: 24) ¡

$\exists z((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},z]$ & $(\mathbf{R}^*)[z,\mathbf{y}])$,! 26 (∃I: 25) ¡

$\exists z((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},z]$ & $(\mathbf{R}^*)[z,\mathbf{y}]) \Rightarrow ((\mathbf{S}^*) \circ (\mathbf{R}^*))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$
,! 27 (⇔E: 8) ¡

$((\mathbf{S}^*) \circ (\mathbf{R}^*))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 28 (⇒E: 26,27) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^*)[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow ((\mathbf{S}^*) \circ (\mathbf{R}^*))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 29 (⇒I: 9,28) ¡

$((\mathbf{S}^*) \circ (\mathbf{R}^*))[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 30 (Prem) ¡

$((\mathbf{S}^*) \circ (\mathbf{R}^*))[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \exists z((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},z]$ & $(\mathbf{R}^*)[z,\mathbf{y}])$
,! 31 (⇔E: 8) ¡

$\exists z((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},z]$ & $(\mathbf{R}^*)[z,\mathbf{y}])$,! 32 (⇒E: 30,31) ¡

$((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ & $(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}])$,! 33 (∃E: 32) ¡

$(\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ & $(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 34 (()E: 33) ¡

$(\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 35 (&E: 34) ¡

$((\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}])$,! 36 (∀E: C3.3) ¡

$(\mathbf{S}^*)[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}]$,! 37 (()E: 36) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{x}]$,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

$(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 39 (&E: 34) ¡

$((\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{z}])$,! 40 (∀E: C3.3) ¡

$(\mathbf{R}^*)[\mathbf{z},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{y},\mathbf{z}]$,! 41 (()E: 40) ¡

R[y,z] ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

R[y,z] & S[z,x] ,! 43 (&I: 38,42) ¡

(R[y,z] & S[z,x]) ,! 44 (()I: 43) ¡

∃z(R[y,z] & S[z,x]) ,! 45 (∃I: 44) ¡

∃z(R[y,z] & S[z,x]) ⇒ (R ∘ S)[y,x] ,! 46 (⇔E: 6) ¡

(R ∘ S)[y,x] ,! 47 (⇒I: 45,46) ¡

(R ∘ S)[y,x] ⇒ ((R ∘ S)*)[x,y] ,! 48 (⇔E: 4) ¡

((R ∘ S)*)[x,y] ,! 49 (⇒E: 47,48) ¡

((S*) ∘ (R*))[x,y] ⇒ ((R ∘ S)*)[x,y] ,! 50 (⇒I: 30,49) ¡

((R ∘ S)*)[x,y] ⇔ ((S*) ∘ (R*))[x,y] ,! 51 (⇔I: 29,50) ¡

(((R ∘ S)*)[x,y] ⇔ ((S*) ∘ (R*))[x,y])
,! 52 (()I: 41) ¡

∀x∀y (((R ∘ S)*)[x,y] ⇔ ((S*) ∘ (R*))[x,y])
,! 53 (∀I: 2,52) ¡

((R ∘ S)*) ≡ ((S*) ∘ (R*)) ,! 54 (𝕊I: C1.5,53) ¡

∀R∀S ((R ∘ S)*) ≡ ((S*) ∘ (R*)) ! 55 (∀I: 1,54) ¡

▯

! **12.** P12 reverses the order in P11 of the terms around the equivalence sign. ¡

⊢ ∀R∀S ((S*) ∘ (R*)) ≡ ((R ∘ S)*) ¡

R,S ,! 1 (Prem) ¡

((R ∘ S)*) ≡ ((S*) ∘ (R*)) ,! 2 (∀E: P11) ¡

(((R ∘ S)*) ≡ ((S*) ∘ (R*)) ⇒ ((S*) ∘ (R*)) ≡ ((R ∘ S)*))
,! 3 (∀E: C1.8) ¡

((R ∘ S)*) ≡ ((S*) ∘ (R*)) ⇒ ((S*) ∘ (R*)) ≡ ((R ∘ S)*)
,! 4 (()E: 3) ¡

((S*) ∘ (R*)) ≡ ((R ∘ S)*) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∀R∀S ((S*) ∘ (R*)) ≡ ((R ∘ S)*) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **13.** The composition of a relationship and our empty predicate is empty. ¡

⊦ ∀R (R ∘ Φ) ≡ Φ ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(∀x∀y ¬ (**R** ∘ Φ)[x,y] ⇒ (**R** ∘ Φ) ≡ Φ) ,! 2 (∀E: C4.8) ¡

∀x∀y ¬ (**R** ∘ Φ)[x,y] ⇒ (**R** ∘ Φ) ≡ Φ ,! 3 (()E: 2) ¡

x,**y** ,! 4 (Prem) ¡

(**R** ∘ Φ)[**x**,**y**] ,! 5 (Prem) ¡

((**R** ∘ Φ)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & Φ[z,**y**]))
,! 6 (∀E: P3) ¡

(**R** ∘ Φ)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & Φ[z,**y**]) ,! 7 (()E: 6) ¡

∃z(**R**[**x**,z] & Φ[z,**y**]) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**R**[**x**,**z**] & Φ[**z**,**y**]) ,! 9 (∃E: 8) ¡

R[**x**,**z**] & Φ[**z**,**y**] ,! 10 (()E: 9) ¡

Φ[**z**,**y**] ,! 11 (&E: 10) ¡

¬ Φ[**z**,**y**] ,! 12 (∀E: C4.3) ¡

ℑ ,! 13 (ℑI: 11,12) ¡

(**R** ∘ Φ)[**x**,**y**] ⇒ ℑ ,! 14 (⇒I: 5,13) ¡

¬ (**R** ∘ Φ)[**x**,**y**] ,! 15 (¬I: 14) ¡

∀x∀y ¬ (**R** ∘ Φ)[x,y] ,! 16 (∀I: 4,15) ¡

(**R** ∘ Φ) ≡ Φ ,! 17 (⇒E: 3,16) ¡

∀R (R ∘ Φ) ≡ Φ ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **14.** The composition of our empty predicate with any relationship is empty. ¡

⊦ ∀R (Φ ∘ R) ≡ Φ ¡

R ,! 1 (Prem) ¡

(∀x∀y ¬ (Φ ∘ **R**)[x,y] ⇒ (Φ ∘ **R**) ≡ Φ) ,! 2 (∀E: C4.8) ¡

∀x∀y ¬ (Φ ∘ **R**)[x,y] ⇒ (Φ ∘ **R**) ≣ Φ ,! 3 (()E: 2) ¡

x,**y** ,! 4 (Prem) ¡

(Φ ∘ **R**)[**x**,**y**] ,! 5 (Prem) ¡

((Φ ∘ **R**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(Φ[**x**,z] & **R**[z,**y**]))
,! 6 (∀E: P3) ¡

(Φ ∘ **R**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(Φ[**x**,z] & **R**[z,**y**]) ,! 7 (()E: 6) ¡

∃z(Φ[**x**,z] & **R**[z,**y**]) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(Φ[**x**,**z**] & **R**[**z**,**y**]) ,! 9 (∃E: 8) ¡

Φ[**x**,**z**] & **R**[**z**,**y**] ,! 10 (()E: 9) ¡

Φ[**x**,**z**] ,! 11 (&E: 10) ¡

¬ Φ[**x**,**z**] ,! 12 (∀E: C4.3) ¡

ℑ ,! 13 (ℑI: 11,12) ¡

(Φ ∘ **R**)[**x**,**y**] ⇒ ℑ ,! 14 (⇒I: 5,13) ¡

¬ (Φ ∘ **R**)[**x**,**y**] ,! 15 (¬I: 14) ¡

∀x∀y ¬ (Φ ∘ **R**)[x,y] ,! 16 (∀I: 4,15) ¡

(Φ ∘ **R**) ≣ Φ ,! 17 (⇒E: 3,16) ¡

∀R (Φ ∘ R) ≣ Φ ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **15.** ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & (S^D)[y] ⇒ ((R ∘ S)^D)[x]) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] & ($\mathbf{S}^D$)[**y**] ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 3 (&E: 2) ¡

($\mathbf{S}^D$)[**y**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(($\mathbf{S}^D$)[**y**] ⇒ ∃y **S**[**y**,y]) ,! 5 (∀E: C5.3) ¡

($\mathbf{S}^D$)[**y**] ⇒ ∃y **S**[**y**,y] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃y **S**[**y**,y] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

S[**y**,**z**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

R[**x**,**y**] & **S**[**y**,**z**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(**R**[**x**,**y**] & **S**[**y**,**z**] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**z**]) ,! 10 (∀E: P5) ¡

R[**x**,**y**] & **S**[**y**,**z**] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ⇒ ((**R** ∘ **S**)^{D})[**x**]) ,! 13 (∀E: C5.5) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ⇒ ((**R** ∘ **S**)^{D})[**x**] ,! 14 (()E: 13) ¡

((**R** ∘ **S**)^{D})[**x**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

R[**x**,**y**] & (**S**^{D})[**y**] ⇒ ((**R** ∘ **S**)^{D})[**x**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(**R**[**x**,**y**] & (**S**^{D})[**y**] ⇒ ((**R** ∘ **S**)^{D})[**x**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀S∀x∀y (R[x,y] & (S^{D})[y] ⇒ ((R ∘ S)^{D})[x])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **16.** The image of a composition is the domain of the composition of the inverse (in inverse order). ¡

⊢ ∀R∀S ((R ∘ S)^{I}) ≡ (((S*) ∘ (R*))^{D}) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ∘ **S**)^{I}) ≡ (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ,! 2 (∀E: C6.15) ¡

((**R** ∘ **S**)*) ≣ ((**S***) ∘ (**R***)) ,! 3 (∀E: P11) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ≣ ((**S***) ∘ (**R***))
⇒ (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D}))
,! 4 (∀E: C5.15) ¡

((**R** ∘ **S**)*) ≣ ((**S***) ∘ (**R***)) ⇒ (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D})
,! 5 (()E: 4) ¡

(((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D}) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

((**R** ∘ **S**)^{I}) ≡ (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) & (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D})
,! 7 (&I: 2,6) ¡

(((**R** ∘ **S**)^{I}) ≡ (((**R** ∘ **S**)*)^{D})
& (((**R** ∘ **S**)*)^{D}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D})
⇒ ((**R** ∘ **S**)^{I}) ≡ (((**S***) ∘ (**R***))^{D}))

,! 8 (∀E: II1.15) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{I}) \equiv (((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})^{D}) \mathbin{\&} (((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})^{D}) \equiv (((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{I}) \equiv (((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))^{D})$

,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{I}) \equiv (((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))^{D})$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$\forall R \forall S\ ((R \circ S)^{I}) \equiv (((S^{*}) \circ (R^{*}))^{D})$! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **17.** The domain of a composition is included in the domain of the first relationship. ¡

$\vdash \forall R \forall S\ ((R \circ S)^{D}) \subseteq (R^{D})$ ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

x ,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]$,! 3 (Prem) ¡

$(((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},y])$

,! 4 (∀E: C5.3) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y\ (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},y]$,! 5 (()E: 4) ¡

$\exists y\ (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},y]$,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

$(\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 7 (∃E: 6) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \exists z(\mathbf{R}[\mathbf{x},z] \mathbin{\&} \mathbf{S}[z,\mathbf{y}]))$

,! 8 (∀E: P3) ¡

$(\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \exists z(\mathbf{R}[\mathbf{x},z] \mathbin{\&} \mathbf{S}[z,\mathbf{y}])$,! 9 (()E: 8) ¡

$\exists z(\mathbf{R}[\mathbf{x},z] \mathbin{\&} \mathbf{S}[z,\mathbf{y}])$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \mathbin{\&} \mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{y}])$,! 11 (∃E: 10) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \mathbin{\&} \mathbf{S}[\mathbf{z},\mathbf{y}]$,! 12 (()E: 11) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 13 (&E: 12) ¡

$(\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}])$,! 14 (∀E: C5.5) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 15 (()E: 14) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 17 (⇒I: 3,16) ¡

$(\; ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \;)$,! 18 (()I: 17) ¡

$\forall x \; (\; ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[x] \Rightarrow (\mathbf{R}^{D})[x] \;)$,! 19 (∀I: 2,18) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})$,! 20 (⊆I: II1.1) ¡

$\forall R \forall S \; ((R \circ S)^{D}) \subseteq (R^{D})$! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **18.** ¡

! The premise of the following theorem could be weakened, but the given form is more convenient, and corresponds better to the use we will put it. ¡

$\vdash \forall R \forall S \; (\; (R^{I}) \subseteq (S^{D}) \Rightarrow ((R \circ S)^{D}) \equiv (R^{D}) \;)$ ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 2 (Prem) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})$,! 3 (∀E: P17) ¡

! To show: $(\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})$ ¡

x ,! 4 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]$,! 5 (Prem) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y] \;)$,! 6 (∀E: C5.3) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow \exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 7 (()E: 6) ¡

$\exists y \; \mathbf{R}[\mathbf{x},y]$,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 9 (∃E: 8) ¡

$(\; \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}] \;)$,! 10 (∀E: C6.5) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}]$,! 11 (()E: 10) ¡

$(\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}]$,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

$(\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}] \; \& \; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 13 (&I: 2,12) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}] \; \& \; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}] \;)$
,! 14 (∀E: II1.2) ¡

$(\mathbf{R}^{I})[\mathbf{z}] \; \& \; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}]$,! 15 (()E: 14) ¡

$(\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}]$,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]\ \&\ (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}]$,! 17 (&I: 9,16) ¡

$(\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]\ \&\ (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}] \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]\ )$
,! 18 (∀E: P15) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]\ \&\ (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{z}] \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]$,! 19 (()E: 18) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]$,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]$,! 21 (⇒I: 5,20) ¡

$(\ (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}] \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[\mathbf{x}]\ )$,! 22 (()I: 21) ¡

$\forall x\ (\ (\mathbf{R}^{D})[x] \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})[x]\ )$,! 23 (∀I: 4,22) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})$,! 24 (𝕊I: II1.1,23) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})\ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})$
,! 25 (&I: 3,24) ¡

$(\ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})\ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})\ )$
,! 26 (∀E: II1.8) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \subseteq (\mathbf{R}^{D})\ \&\ (\mathbf{R}^{D}) \subseteq ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})$
,! 27 (()E: 26) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})$,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

$(\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})$,! 29 (⇒I: 2,28) ¡

$(\ (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})\ )$,! 30 (()I: 29) ¡

$\forall R \forall S\ (\ (R^{I}) \subseteq (S^{D}) \Rightarrow ((R \circ S)^{D}) \equiv (R^{D})\ )$! 31 (∀I: 1,30) ¡

□

! **19.** ¡

$\vdash \forall R \forall S \forall A \forall B\ (\ (R^{D}) \equiv A\ \&\ (S^{D}) \equiv B\ \&\ (R^{I}) \subseteq B$
$\Rightarrow ((R \circ S)^{D}) \equiv A\ )$ ¡

R,S,A,B ,! 1 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}\ \&\ (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B}$,! 2 (Prem) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 3 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}\ \&\ (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B}$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \;)$

,! 5 ($\forall$E: II1.31) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 6 (()E: 5) ¡

$(\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D})$,! 7 ($\Rightarrow$E: 4,6) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D}) \;)$,! 8 ($\forall$E: P18) ¡

$(\mathbf{R}^{I}) \subseteq (\mathbf{S}^{D}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})$,! 9 (()E: 8) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D})$,! 10 ($\Rightarrow$E: 7,9) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D}) \;\&\; (\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 11 (&I: 3,10) ¡

$(\; ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D}) \;\&\; (\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A} \;)$

,! 12 ($\forall$E: II1.15) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv (\mathbf{R}^{D}) \;\&\; (\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$

,! 13 (()E: 12) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 14 ($\Rightarrow$E: 11,13) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$

,! 15 ($\Rightarrow$I: 2,14) ¡

$(\; (\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B} \;\&\; (\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A} \;)$

,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall R \forall S \forall A \forall B \; (\; (R^{D}) \equiv A \;\&\; (S^{D}) \equiv B \;\&\; (R^{I}) \subseteq B \Rightarrow ((R \circ S)^{D}) \equiv A \;)$

! 17 ($\forall$I: 1,16) ¡

□

! **20.** ¡

$\vdash \forall R \forall S \forall A \; ((R \circ S) \lceil A) \equiv ((R \lceil A) \circ S)$ ¡

$\mathbf{R},\mathbf{S},\mathbf{A}$,! 1 (Prem) ¡

$\mathbf{x},\mathbf{y}$,! 2 (Prem) ¡

$(\; ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \lceil \mathbf{A})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Leftrightarrow (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \;\&\; \mathbf{A}[\mathbf{x}] \;)$

,! 3 ($\forall$E: C7.2) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S}) \lceil \mathbf{A})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Leftrightarrow (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \;\&\; \mathbf{A}[\mathbf{x}]$

,! 4 (()E: 3) ¡

$(\; (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Leftrightarrow \exists z(\mathbf{R}[\mathbf{x},z] \;\&\; \mathbf{S}[z,\mathbf{y}]) \;)$

,! 5 ($\forall$E: P2) ¡

(R ∘ S)[x,y] ⇔ ∃z(R[x,z] & S[z,y]) ,! 6 (()E: 5) ¡

(((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ⇔ ∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]))
,! 7 (∀E: P2) ¡

((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ⇔ ∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y])
,! 8 (()E: 7) ¡

((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ,! 9 (Prem) ¡

((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ⇒ (R ∘ S)[x,y] & A[x]
,! 10 (⇔E: 4) ¡

(R ∘ S)[x,y] & A[x] ,! 11 (⇒E: 9,10) ¡

(R ∘ S)[x,y] ,! 12 (&E: 11) ¡

(R ∘ S)[x,y] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,y]) ,! 13 (⇔E: 6) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,y]) ,! 14 (⇒E: 12,13) ¡

(R[x,z] & S[z,y]) ,! 15 (∃E: 14) ¡

R[x,z] & S[z,y] ,! 16 (()E: 15) ¡

R[x,z] ,! 17 (&E: 16) ¡

A[x] ,! 18 (&E: 11) ¡

R[x,z] & A[x] ,! 19 (&I: 17,18) ¡

(R[x,z] & A[x] ⇒ (R ⌈ A)[x,z]) ,! 20 (∀E: C7.4) ¡

R[x,z] & A[x] ⇒ (R ⌈ A)[x,z] ,! 21 (()E: 20) ¡

(R ⌈ A)[x,z] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

S[z,y] ,! 23 (&E: 16) ¡

(R ⌈ A)[x,z] & S[z,y] ,! 24 (&I: 22,23) ¡

((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]) ,! 25 (()I: 24) ¡

∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]) ,! 26 (∃I: 25) ¡

∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]) ⇒ ((R ⌈ A) ∘ S)[x,y]
,! 27 (⇔E: 8) ¡

((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ,! 28 (⇒E: 26,27) ¡

((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ⇒ ((R ⌈ A) ∘ S)[x,y]
,! 29 (⇒I: 9,28) ¡

((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ,! 30 (Prem) ¡

((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ⇒ ∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y])
,! 31 (⇔E: 8) ¡

∃z((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]) ,! 32 (⇒E: 30,31) ¡

((R ⌈ A)[x,z] & S[z,y]) ,! 33 (∃E: 32) ¡

(R ⌈ A)[x,z] & S[z,y] ,! 34 (()E: 33) ¡

(R ⌈ A)[x,z] ,! 35 (&E: 34) ¡

((R ⌈ A)[x,z] ⇒ R[x,z] & A[x]) ,! 36 (∀E: C7.3) ¡

(R ⌈ A)[x,z] ⇒ R[x,z] & A[x] ,! 37 (()E: 36) ¡

R[x,z] & A[x] ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

R[x,z] ,! 39 (&E: 38) ¡

S[z,y] ,! 40 (&E: 34) ¡

R[x,z] & S[z,y] ,! 41 (&I: 39,40) ¡

(R[x,z] & S[z,y]) ,! 42 (()I: 41) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,y]) ,! 43 (∃I: 42) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,y]) ⇒ (R ∘ S)[x,y] ,! 44 (⇔E: 6) ¡

(R ∘ S)[x,y] ,! 45 (⇒E: 43,44) ¡

A[x] ,! 46 (&E: 38) ¡

(R ∘ S)[x,y] & A[x] ,! 47 (&I: 45,46) ¡

(R ∘ S)[x,y] & A[x] ⇒ ((R ∘ S) ⌈ A)[x,y]
,! 48 (⇔E: 4) ¡

((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ,! 49 (⇒E: 47,48) ¡

((R ⌈ A) ∘ S)[x,y] ⇒ ((R ∘ S) ⌈ A)[x,y]
,! 50 (⇒I: 30,49) ¡

((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ⇔ ((R ⌈ A) ∘ S)[x,y]
,! 51 (⇔I: 29,50) ¡

(((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ⇔ ((R ⌈ A) ∘ S)[x,y])
,! 52 (()I: 51) ¡

∀x∀y (((R ∘ S) ⌈ A)[x,y] ⇔ ((R ⌈ A) ∘ S)[x,y])
,! 53 (∀I: 2,52) ¡

((**R** ∘ **S**) ⌈ **A**) ≡ ((**R** ⌈ **A**) ∘ **S**) ,! 54 (𝕊I: C1.5,53) ¡

∀R∀S∀A ((R ∘ S) ⌈ A) ≡ ((R ⌈ A) ∘ S) ! 55 (∀I: 1,54) ¡

▯

! **21.** P21's proof appeals to P20 and duality. An alternative would have been to repeat P20's proof. ¡

⊢ ∀R∀S∀A ((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (R ∘ (S ⌊ A)) ¡

R,**S**,**A** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ∘ **S**) ⌊ **A**) ≡ ((((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**)*) ,! 2 (∀E: C7.51) ¡

((**R** ∘ **S**)*) ≡ ((**S***) ∘ (**R***)) ,! 3 (∀E: P11) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ≡ ((**S***) ∘ (**R***))
⇒ (((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**))
,! 4 (∀E: C7.12) ¡

((**R** ∘ **S**)*) ≡ ((**S***) ∘ (**R***))
⇒ (((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**)
,! 5 (()E: 4) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**) ,! 6 (⇒E: 5) ¡

(((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
,! 7 (∀E: P20) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**)
& (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
,! 8 (&I: 6,7) ¡

((((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**)
& (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
⇒ (((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***)))
,! 9 (∀E: C1.15) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**)
& (((**S***) ∘ (**R***)) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
⇒ (((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
,! 10 (()E: 9) ¡

(((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**) ≡ (((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))
⇒ ((((**R** ∘ **S**)*) ⌈ **A**)*) ≡ ((((**S***) ⌈ **A**) ∘ (**R***))*))

,! 12 (∀E: C3.20) ¡

(((R ∘ S)*) ⌈ A) ≣ (((S*) ⌈ A) ∘ (R*))
⇒ ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
,! 13 (()E: 12) ¡

((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≣ ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*)
& ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
,! 15 (&I: 2,14) ¡

((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 16 (∀E: P11) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≣ ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*)
& ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
& ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 15 (&I: 15,16) ¡

(((R ∘ S) ⌊ A) ≣ ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*)
& ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
& ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
⇒ ((R ∘ S) ⌊ A) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*)))
,! 16 (∀E: C1.19) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≣ ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*)
& ((((R ∘ S)*) ⌈ A)*) ≣ ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*)
& ((((S*) ⌈ A) ∘ (R*))*) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
⇒ ((R ∘ S) ⌊ A) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 17 (()E: 16) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

R ≣ ((R*)*) ,! 19 (∀E: C3.18) ¡

(S ⌊ A) ≣ (((S*) ⌈ A)*) ,! 20 (∀E: C7.51) ¡

R ≣ ((R*)*) & (S ⌊ A) ≣ (((S*) ⌈ A)*) ,! 21 (&I: 19,20) ¡

(R ≣ ((R*)*) & (S ⌊ A) ≣ (((S*) ⌈ A)*)
⇒ (R ∘ (S ⌊ A)) ≣ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*)))
,! 22 (∀E: P7) ¡

R ≣ ((R*)*) & (S ⌊ A) ≣ (((S*) ⌈ A)*)

⇒ (R ∘ (S ⌊ A)) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 23 (()E: 22) ¡

(R ∘ (S ⌊ A)) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
& (R ∘ (S ⌊ A)) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
,! 25 (&I: 18,24) ¡

(((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
& (R ∘ (S ⌊ A)) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
⇒ ((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (R ∘ (S ⌊ A)))
,! 26 (∀E: C1.17) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
& (R ∘ (S ⌊ A)) ≡ (((R*)*) ∘ (((S*) ⌈ A)*))
⇒ ((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (R ∘ (S ⌊ A))
,! 27 (()E: 26) ¡

((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (R ∘ (S ⌊ A)) ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

∀R∀S∀A ((R ∘ S) ⌊ A) ≡ (R ∘ (S ⌊ A)) ! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **22.** The composition of functional relationships if functional. ¡

⊢ ∀R∀S (**f** R & **f** S ⇒ **f** (R ∘ S)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

f R & **f S** ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

f S ,! 4 (&E: 2) ¡

x,**y**,**z** ,! 5 (Prem) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] & (**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ,! 6 (Prem) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ,! 7 (&E: 6) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**z**] ,! 8 (&E: 6) ¡

((**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**]))
,! 9 (∀E: P3) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,**y**] ⇒ ∃z(**R**[**x**,z] & **S**[z,**y**])
,! 10 (()E: 9) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,y]) ,! 11 (⇒E: 7,10) ¡

(R[x,a] & S[a,y]) ,! 12 (∃E: 11) ¡

R[x,a] & S[a,y] ,! 13 (()E: 12) ¡

R[x,a] ,! 14 (&E: 13) ¡

S[a,y] ,! 15 (&E: 13) ¡

((R ∘ S)[x,z] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,z]))
,! 16 (∀E: P3) ¡

(R ∘ S)[x,z] ⇒ ∃z(R[x,z] & S[z,z])
,! 17 (()E: 16) ¡

∃z(R[x,z] & S[z,z]) ,! 18 (⇒E: 8,17) ¡

(R[x,b] & S[b,z]) ,! 19 (∃E: 18) ¡

R[x,b] & S[b,z] ,! 20 (()E: 19) ¡

R[x,b] ,! 21 (&E: 20) ¡

S[b,z] ,! 22 (&E: 20) ¡

R[x,a] & R[x,b] ,! 23 (&I: 14,21) ¡

f R & R[x,a] & R[x,b] ,! 23 (&I: 3,23) ¡

(f R & R[x,a] & R[x,b] ⇒ a = b) ,! 24 (∀E: C8.2) ¡

f R & R[x,a] & R[x,b] ⇒ a = b ,! 25 (()E: 24) ¡

a = b ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

S[a,y] & S[b,z] ,! 27 (&I: 15,22) ¡

S[a,y] & S[a,z] ,! 28 (=E: 26,27) ¡

f S & S[a,y] & S[a,z] ,! 29 (&I: 4,28) ¡

(f S & S[a,y] & S[a,z] ⇒ y = z)
,! 30 (∀E: C8.2) ¡

f S & S[a,y] & S[a,z] ⇒ y = z ,! 31 (()E: 30) ¡

y = z ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

(R ∘ S)[x,y] & (R ∘ S)[x,z] ⇒ y = z
,! 33 (⇒I: 6,32) ¡

((R ∘ S)[x,y] & (R ∘ S)[x,z] ⇒ y = z)
,! 34 (()I: 33) ¡

∀x∀y∀z ((**R** ∘ **S**)[x,y] & (**R** ∘ **S**)[x,z] ⇒ y = z)
,! 35 (∀I: 5,34) ¡

f (**R** ∘ **S**) ,! 36 (𝕊I: C8.1) ¡

f **R** & **f** **S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**) ,! 37 (⇒I: 2,36) ¡

(**f** **R** & **f** **S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**)) ,! 38 (()I: 37) ¡

∀R∀S (**f** R & **f** S ⇒ **f** (R ∘ S)) ! 39 (∀I: 1,38) ¡

▯

! **23.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (**f** S & (S^D)[(R´x)] ⇒ ((R ° S)´x) = (S´(R´x))) ¡

R,**S**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

f **S** & (**S**^{D})[(**R**´**x**)] ,! 2 (Prem) ¡

f **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**S**^{D})[(**R**´**x**)] ,! 4 (&E: 2) ¡

f **R** & (**R**^{D})[**x**] ,! 5 (𝕋E: C8.20,4) ¡

R[**x**,(**R**´**x**)] ,! 6 (𝕋I: C8.20,5) ¡

f **S** & (**S**^{D})[(**R**´**x**)] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

S[(**R**´**x**),(**S**´(**R**´**x**))] ,! 8 (𝕋I: C8.20,2) ¡

R[**x**,(**R**´**x**)] & **S**[(**R**´**x**),(**S**´(**R**´**x**))] ,! 9 (&I: 6,8) ¡

(**R**[**x**,(**R**´**x**)] & **S**[(**R**´**x**),(**S**´(**R**´**x**))] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))])
,! 10 (∀E: P5;
(**R**´**x**): C8.20,5;
(**S**´(**R**´**x**)):
C8.20,7) ¡

R[**x**,(**R**´**x**)] & **S**[(**R**´**x**),(**S**´(**R**´**x**))] ⇒ (**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))]
,! 11 (()E: 10) ¡

(**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

f **R** ,! 13 (&E: 5) ¡

f **R** & **f** **S** ,! 14 (&I: 3,13) ¡

(**f** **R** & **f** **S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**)) ,! 15 (∀E: P22) ¡

f **R** & **f** **S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**) ,! 16 (()E: 15) ¡

f (**R** ∘ **S**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

f (**R** ∘ **S**) & (**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))] ,! 18 (&I: 12,17) ¡

(**f** (**R** ∘ **S**) & (**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))]
⇒ ((**R** ∘ **S**)´**x**) = (**S**´(**R**´**x**)))
,! 19 (∀E: C8.22; (**S**´(**R**´**x**)): C8.20,7) ¡

f (**R** ∘ **S**) & (**R** ∘ **S**)[**x**,(**S**´(**R**´**x**))] ⇒ ((**R** ∘ **S**)´**x**) = (**S**´(**R**´**x**))
,! 20 (()E: 19) ¡

((**R** ∘ **S**)´**x**) = (**S**´(**R**´**x**)) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

f **S** & ($\mathbf{S}^D$)[(**R**´**x**)] ⇒ ((**R** ∘ **S**)´**x**) = (**S**´(**R**´**x**))
,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(**f** **S** & ($\mathbf{S}^D$)[(**R**´**x**)] ⇒ ((**R** ∘ **S**)´**x**) = (**S**´(**R**´**x**)))
,! 23 (()I: 22) ¡

∀R∀S∀x (**f** S & (S^D)[(R´x)] ⇒ ((R ° S)´x) = (S´(R´x)))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **24.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & S 𝔽 B & (R^I) ⊆ B ⇒ (R ∘ S) 𝔽 A) ¡

R,**S**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & ($\mathbf{R}^I$) ⊆ **B** ,! 2 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** ,! 3 (&E: 2) ¡

($\mathbf{R}^D$) ≡ **A** & **f** **R** ,! 4 (𝕊E: C8.10,3) ¡

($\mathbf{R}^D$) ≡ **A** ,! 5 (&E: 4) ¡

f **R** ,! 6 (&E: 4) ¡

S 𝔽 **B** ,! 7 (&E: 2) ¡

($\mathbf{S}^D$) ≡ **B** & **f** **S** ,! 8 (𝕊E: C8.10,7) ¡

($\mathbf{S}^D$) ≡ **B** ,! 9 (&E: 8) ¡

f **S** ,! 10 (&E: 8) ¡

($\mathbf{R}^D$) ≡ **A** & ($\mathbf{S}^D$) ≡ **B** ,! 11 (&I: 5,9) ¡

($\mathbf{R}^I$) ⊆ **B** ,! 12 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}$ & $(\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B}$,! 13 (&I: 11,12) ¡

($(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}$ & $(\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$)
,! 14 (∀E: P19) ¡

$(\mathbf{R}^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & $(\mathbf{S}^{D}) \equiv \mathbf{B}$ & $(\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$
,! 15 (()E: 14) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

f R & **f S** ,! 17 (&I: 6,10) ¡

(**f R** & **f S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**)) ,! 18 (∀E: P22) ¡

f R & **f S** ⇒ **f** (**R** ∘ **S**) ,! 19 (()E: 18) ¡

f (**R** ∘ **S**) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{D}) \equiv \mathbf{A}$ & **f** (**R** ∘ **S**) ,! 21 (&I: 16,20) ¡

(**R** ∘ **S**) 𝔽 **A** ,! 22 (𝕊I: C8.10,21)
¡

R 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & $(\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B}$ ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A**
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & $(\mathbf{R}^{I}) \subseteq \mathbf{B}$ ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A**)
,! 24 (()I: 23) ¡

∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & S 𝔽 B & $(R^{I}) \subseteq B$ ⇒ (R ∘ S) 𝔽 A)
! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **25.** ¡

⊢ ∀R∀S∀B∀C (R 𝟙 B & S 𝟙 C & $(S^{D}) \subseteq B$ ⇒ (R ∘ S) 𝟙 C) ¡

R,S,B,C ,! 1 (Prem) ¡

R 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & $(\mathbf{S}^{D}) \subseteq \mathbf{B}$,! 2 (Prem) ¡

R 𝟙 **B** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R** 𝟙 **B** ⇒ $(\mathbf{R}^{*})$ 𝔽 **B**) ,! 4 (∀E: C9.20) ¡

R 𝟙 **B** ⇒ $(\mathbf{R}^{*})$ 𝔽 **B** ,! 5 (()E: 4) ¡

$(\mathbf{R}^{*})$ 𝔽 **B** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

S 𝟙 **C** ,! 7 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{S}\ \mathbb{1}\ \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C})$,! 8 (∀E: C9.20) ¡

$\mathbf{S}\ \mathbb{1}\ \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$,! 9 (()E: 8) ¡

$(\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

$(\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ (\mathbf{R}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{B}$,! 11 (&I: 6,10) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \subseteq \mathbf{B}$,! 12 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv ((\mathbf{S}^{*})^{I})$,! 13 (∀E: C6.16) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv ((\mathbf{S}^{*})^{I})\ \&\ (\mathbf{S}^{D}) \subseteq \mathbf{B}$,! 14 (&I: 12,13) ¡

$(\ (\mathbf{S}^{D}) \equiv ((\mathbf{S}^{*})^{I})\ \&\ (\mathbf{S}^{D}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B}\ )$
,! 15 (∀E: II1.30) ¡

$(\mathbf{S}^{D}) \equiv ((\mathbf{S}^{*})^{I})\ \&\ (\mathbf{S}^{D}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B}$
,! 16 (()E: 15) ¡

$((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B}$,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

$(\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ (\mathbf{R}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{B}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B}$,! 18 (&I: 11,17) ¡

$(\ (\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ (\mathbf{R}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{B}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B}$
$\Rightarrow ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ )$
,! 19 (∀E: P24) ¡

$(\mathbf{S}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ (\mathbf{R}^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{B}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*})^{I}) \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$
,! 20 (()E: 19) ¡

$((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

$((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*})) ≣ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})$,! 22 (∀E: P12) ¡

$((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*})) ≣ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})$
,! 23 (&I: 21,22) ¡

$(\ ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*})) ≣ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ )$
,! 24 (∀E: C8.12) ¡

$((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*}))\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}\ \&\ ((\mathbf{S}^{*}) \circ (\mathbf{R}^{*})) ≣ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})$
$\Rightarrow ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$
,! 25 (()E: 24) ¡

$((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C}$,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

$(\ ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S})^{*})\ \mathbb{F}\ \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{R} \circ \mathbf{S})\ \mathbb{1}\ \mathbf{C}\ )$,! 27 (∀E: C9.21) ¡

((**R** ∘ **S**)*) 𝔽 **C** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C** ,! 28 (()E: 27) ¡

(**R** ∘ **S**) 𝟙 **C** ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

R 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & (**S**ᴰ) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**
,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(**R** 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & (**S**ᴰ) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**)
,! 31 (()I: 30) ¡

∀R∀S∀B∀C (R 𝟙 B & S 𝟙 C & (Sᴰ) ⊆ B ⇒ (R ∘ S) 𝟙 C)
! 32 (∀I: 1,31) ¡

▯

! **26.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A∀B∀C (R 𝔽 A & R 𝟙 B & S 𝔽 B & S 𝟙 C
⇒ (R ∘ S) 𝔽 A & (R ∘ S) 𝟙 C) ¡

R,S,A,B,C ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **R** 𝟙 **B** & **S** 𝔽 **B** & **S** 𝟙 **C** ,! 2 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** ,! 3 (&E: 2) ¡

R 𝟙 **B** ,! 4 (&E: 2) ¡

S 𝔽 **B** ,! 5 (&E: 2) ¡

S 𝟙 **C** ,! 6 (&E: 2) ¡

R 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** ,! 7 (&I: 3,5) ¡

R 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** ,! 8 (&I: 4,6) ¡

(**R**ᴵ) ≡ **B** & **1** **R** ,! 9 (𝕊E: C9.19,4) ¡

(**R**ᴵ) ≡ **B** ,! 10 (&E: 9) ¡

((**R**ᴵ) ≡ **B** ⇒ (**R**ᴵ) ⊆ **B**) ,! 11 (∀E: II1.11) ¡

(**R**ᴵ) ≡ **B** ⇒ (**R**ᴵ) ⊆ **B** ,! 12 (()E: 11) ¡

(**R**ᴵ) ⊆ **B** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

R 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & (**R**ᴵ) ⊆ **B** ,! 14 (&I: 7,13) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & (**R**ᴵ) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A**)
,! 15 (∀E: P24) ¡

R 𝔽 **A** & **S** 𝔽 **B** & (**R**ᴵ) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A**
,! 16 (()E: 15) ¡

(R ∘ S) 𝔽 A ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

($\mathbf{S}^{D}$) ≡ **B** & **f S** ,! 18 (𝕊E: C8.10,5) ¡

($\mathbf{S}^{D}$) ≡ **B** ,! 19 (&E: 18) ¡

(($\mathbf{S}^{D}$) ≡ **B** ⇒ ($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B**) ,! 20 (∀E: II1.11) ¡

($\mathbf{S}^{D}$) ≡ **B** ⇒ ($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B** ,! 21 (()E: 20) ¡

($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

R 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & ($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B** ,! 23 (&I: 8,22) ¡

(**R** 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & ($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**)
,! 24 (∀E: P25) ¡

R 𝟙 **B** & **S** 𝟙 **C** & ($\mathbf{S}^{D}$) ⊆ **B** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**
,! 25 (()E: 24) ¡

(**R** ∘ **S**) 𝟙 **C** ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

(**R** ∘ **S**) 𝔽 **A** & (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C** ,! 27 (&I: 17,26) ¡

R 𝔽 **A** & **R** 𝟙 **B** & **S** 𝔽 **B** & **S** 𝟙 **C** ⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A** & (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**
,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **R** 𝟙 **B** & **S** 𝔽 **B** & **S** 𝟙 **C**
⇒ (**R** ∘ **S**) 𝔽 **A** & (**R** ∘ **S**) 𝟙 **C**)
,! 29 (()I: 28) ¡

∀R∀S∀A∀B∀C (R 𝔽 A & R 𝟙 B & S 𝔽 B & S 𝟙 C
⇒ (R ∘ S) 𝔽 A & (R ∘ S) 𝟙 C)
,! 30 (∀I: 1,29) ¡

▯