!**CHAPTER 12**

PAIRINGS¡

! This chapter introduces a pairing predicate of equality, written (**a** ▪ **b**). x holds (**a** ▪ **b**) to y precisely when x is **a** and y is **b**. ¡

! **1.** ▪ represents pairing. ¡

𝔻 ▪ ; (**a** ▪ **b**) ; ; {a,b : a = **a** & b = **b**} ¡

! **2. Fundamental Proposition of Pairing.** ¡

⊦ ∀a∀b∀x∀y ((a ▪ b)[x,y] ⇔ x = a & y = b) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ({a,b : a = **a** & b = **b**}[x,y] ⇔ x = **a** & y = **b**)
,! 2 (Pred) ¡

∀x∀y ((**a** ▪ **b**)[x,y] ⇔ x = **a** & y = **b**) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀a∀b∀x∀y ((a ▪ b)[x,y] ⇔ x = a & y = b)
! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Pairing, First Half.** ¡

⊦ ∀a∀b∀x∀y ((a ▪ b)[x,y] ⇒ x = a & y = b) ¡

a,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 3 (()E: 2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀a∀b∀x∀y ((a ▪ b)[x,y] ⇒ x = a & y = b)
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Pairing, Second Half.** ¡

⊦ ∀a∀b∀x∀y (x = a & y = b ⇒ (a ▪ b)[x,y]) ¡

a,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 3 (()E: 2) ¡

x = **a** & **y** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**x** = **a** & **y** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀a∀b∀x∀y (x = a & y = b ⇒ (a ▪ b)[x,y])
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀a∀b (a ▪ b)[a,b] ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

a = **a** ,! 2 (=I) ¡

b = **b** ,! 3 (=I) ¡

a = **a** & **b** = **b** ,! 4 (&I) ¡

(**a** = **a** & **b** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

a = **a** & **b** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 6 (()E: 5) ¡

(**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀a∀b (a ▪ b)[a,b] ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀a∀b∀x∀y (¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b) ¡

a,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(**x** = **a** ∨ ¬ **x** = **a**) ,! 3 (∀E: I3.4) ¡

x = **a** ∨ ¬ **x** = **a** ,! 4 (()E: 3) ¡

x = **a** ,! 5 (Prem) ¡

(**y** = **b** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 6 (∀E: I3.4) ¡

y = **b** ∨ ¬ **y** = **b** ,! 7 (()E: 6) ¡

y = **b** ,! 8 (Prem) ¡

¬ (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 9 (Prem) ¡

¬ (**a** ▪ **b**)[**a**,**y**] ,! 10 (=E: 2,5) ¡

¬ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 11 (=E: 8,10) ¡

(a ▪ b)[a,b] ,! 12 (∀E: P5) ¡

𝔉 ,! 13 (𝔉I: 11,12) ¡

¬ (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ⇒ 𝔉 ,! 14 (⇒I: 9,13) ¡

¬¬ (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ,! 15 (¬I: 14) ¡

(¬ x = a ∨ ¬ y = b) ,! 16 (¬E: 15) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 17 (()E: 16) ¡

y = b ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 18 (⇒I: 8,17) ¡

¬ y = b ,! 19 (Prem) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 20 (∨I: 19) ¡

¬ y = b ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 21 (⇒I: 19,20) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 22 (∨E: 7,18,21) ¡

x = a ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 23 (⇒I: 5,22) ¡

¬ x = a ,! 24 (Prem) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 25 (∨I: 24) ¡

¬ x = a ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 26 (⇒I: 24,25) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 27 (∨E: 4,23,26) ¡

¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b)
,! 29 (()I: 28) ¡

∀a∀b∀x∀y (¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b)
! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! 7. ¡

⊢ ∀R∀a∀b (R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⊆ R) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R[a,b] ,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

(a ▪ b)[x,y] ,! 4 (Prem) ¡

((a ▪ b)[x,y] ⇒ x = a & y = b) ,! 5 (∀E: P3) ¡

(a ▪ b)[x,y] ⇒ x = a & y = b ,! 6 (()E: 5) ¡

x = a & y = b ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

x = a ,! 8 (&E: 7) ¡

y = b ,! 9 (&E: 7) ¡

R[x,b] ,! 10 (=E: 2,8) ¡

R[x,y] ,! 11 (=E: 9,10) ¡

(a ▪ b)[x,y] ⇒ R[x,y] ,! 12 (⇒I: 4,11) ¡

((a ▪ b)[x,y] ⇒ R[x,y]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀x∀y ((a ▪ b)[x,y] ⇒ R[x,y]) ,! 14 (∀I: 3,13) ¡

(a ▪ b) ⫅ R ,! 15 (𝕊I: C1.1,14) ¡

R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⫅ R ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⫅ R) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀R∀a∀b (R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⫅ R) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! 8. ¡

⊦ ∀R∀a∀b ((a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b]) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

(a ▪ b) ⫅ R ,! 2 (Prem) ¡

(a ▪ b)[a,b] ,! 3 (∀E: P5) ¡

(a ▪ b)[a,b] & (a ▪ b) ⫅ R ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((a ▪ b)[a,b] & (a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b])
,! 5 (∀E: C1.2) ¡

(a ▪ b)[a,b] & (a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b] ,! 6 (()E: 5) ¡

R[a,b] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀a∀b ((a ▪ b) ⫅ R ⇒ R[a,b]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! 9. ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (a = c & b = d ⇒ (a ■ b) ⫋ (c ■ d)) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

a = **c** & **b** = **d** ,! 2 (Prem) ¡

a = **c** ,! 3 (&E: 2) ¡

b = **d** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**c** ■ **d**)[**c**,**d**] ,! 5 (∀E: P5) ¡

((**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ⇒ (**a** ■ **b**) ⫋ (**c** ■ **d**)) ,! 6 (∀E: P7) ¡

(**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ⇒ (**a** ■ **b**) ⫋ (**c** ■ **d**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**c** ■ **d**)[**a**,**d**] ,! 8 (=E: 3,5) ¡

(**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ,! 9 (=E: 4,8) ¡

(**a** ■ **b**) ⫋ (**c** ■ **d**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

a = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ■ **b**) ⫋ (**c** ■ **d**) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**a** = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ■ **b**) ⫋ (**c** ■ **d**)) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀a∀b∀c∀d (a = c & b = d ⇒ (a ■ b) ⫋ (c ■ d))
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **10.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d ((a ■ b) ≣ (c ■ d) ⇒ a = c & b = d) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

(**a** ■ **b**) ≣ (**c** ■ **d**) ,! 2 (Prem) ¡

(**a** ■ **b**)[**a**,**b**] ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**a** ■ **b**)[**a**,**b**] & (**a** ■ **b**) ≣ (**c** ■ **d**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((**a** ■ **b**)[**a**,**b**] & (**a** ■ **b**) ≣ (**c** ■ **d**) ⇒ (**c** ■ **d**)[**a**,**b**])
,! 5 (∀E: C1.20) ¡

(**a** ■ **b**)[**a**,**b**] & (**a** ■ **b**) ≣ (**c** ■ **d**) ⇒ (**c** ■ **d**)[**a**,**b**]
,! 6 (()E: 5) ¡

(**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

((**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ⇒ **a** = **c** & **b** = **d**) ,! 8 (∀E: P3) ¡

(**c** ■ **d**)[**a**,**b**] ⇒ **a** = **c** & **b** = **d** ,! 9 (()E: 8) ¡

a = **c** & **b** = **d** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**) ⇒ **a** = **c** & **b** = **d** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

((**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**) ⇒ **a** = **c** & **b** = **d**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀a∀b∀c∀d ((a ▪ b) ≣ (c ▪ d) ⇒ a = c & b = d)
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **11.** A couple of steps are saved by appealing to P7 rather than P9 a second time. ¡

⊦ ∀a∀b∀c∀d (a = c & b = d ⇒ (a ▪ b) ≣ (c ▪ d)) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

a = **c** & **b** = **d** ,! 2 (Prem) ¡

(**a** = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**))
,! 3 (∀E: P9) ¡

a = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**) ,! 5 (⇒E: 4) ¡

((**a** ▪ **b**)[**c**,**d**] ⇒ (**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**)) ,! 6 (∀E: P7) ¡

(**a** ▪ **b**)[**c**,**d**] ⇒ (**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 8 (∀E: P5) ¡

a = **c** ,! 9 (&E: 2) ¡

b = **d** ,! 10 (&E: 2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**c**,**b**] ,! 11 (=E: 8,9) ¡

(**a** ▪ **b**)[**c**,**d**] ,! 12 (=E: 10,11) ¡

(**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**) ,! 13 (⇒E: 7,12) ¡

(**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**) & (**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**) ,! 14 (&I: 5,13) ¡

((**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**) & (**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**)
⇒ (**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**))
,! 15 (∀E: C1.6) ¡

(**a** ▪ **b**) ⫅ (**c** ▪ **d**) & (**c** ▪ **d**) ⫅ (**a** ▪ **b**) ⇒ (**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**)
,! 16 (()E: 15) ¡

(**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

a = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**) ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(**a** = **c** & **b** = **d** ⇒ (**a** ▪ **b**) ≣ (**c** ▪ **d**)) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀a∀b∀c∀d (a = c & b = d ⇒ (a ▪ b) ≣ (c ▪ d))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (R[a,b] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = a & y = b)
⇒ R ≣ (a ▪ b)) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

R[**a**,**b**] & ∀x∀y(**R**[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**)
,! 2 (Prem) ¡

R[**a**,**b**] ,! 3 (&E: 2) ¡

∀x∀y(**R**[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**) ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R**[**a**,**b**] ⇒ (**a** ▪ **b**) ⫅ **R**) ,! 6 (∀E: P7) ¡

R[**a**,**b**] ⇒ (**a** ▪ **b**) ⫅ **R** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**a** ▪ **b**) ⫅ **R** ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

! To show: **R** ⫅ (**a** ▪ **b**) ¡

x,**y** ,! 9 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 10 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 11 (∀E: 4) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 12 (()E: 11) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**x** = **a** & **y** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]) ,! 14 (∀E: P4) ¡

x = **a** & **y** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 15 (()E: 14) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 17 (⇒I: 10,16) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇒ (**a** ▪ **b**)[x,y]) ,! 19 (∀I: 9,18) ¡

R ⫅ (**a** ▪ **b**) ,! 20 (𝕊I: C1.1,19) ¡

R ⫅ (**a** ▪ **b**) & (**a** ▪ **b**) ⫅ **R** ,! 21 (&I: 8,20) ¡

(**R** ⫅ (**a** ▪ **b**) & (**a** ▪ **b**) ⫅ **R** ⇒ **R** ≡ (**a** ▪ **b**))

,! 22 (∀E: C1.6) ¡

R ⫅ (a ▪ b) & (a ▪ b) ⫅ R ⇒ R ≡ (a ▪ b)
,! 23 (()E: 22) ¡

R ≡ (a ▪ b) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

R[a,b] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = a & y = b) ⇒ R ≡ (a ▪ b)
,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

(R[a,b] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = a & y = b) ⇒ R ≡ (a ▪ b))
,! 26 (()I: 25) ¡

∀R∀a∀b (R[a,b] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = a & y = b) ⇒ R ≣ (a ▪ b))
! 27 (∀I: 1,26) ¡

▯

! **13.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (R ⊔ (a ▪ b))[a,b] ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

(**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 2 (∀E: P5) ¡

R[**a**,**b**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 3 (∨I: 2) ¡

(**R**[**a**,**b**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ⇒ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**a**,**b**])
,! 4 (∀E: C2.4) ¡

R[**a**,**b**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ⇒ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**a**,**b**]
,! 5 (()E: 4) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**a**,**b**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∀R∀a∀b (R ⊔ (a ▪ b))[a,b] ! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **14.** ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b (S ≣ (R ⊔ (a ▪ b))
⇒ ∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b)))
¡

R,S,a,b ,! 1 (Prem) ¡

S ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**)) ,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

∀x∀y (**S**[x,y] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[x,y])
,! 4 (𝕊E: C1.5,2) ¡

(**S**[**x**,**y**] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**]) ,! 5 (∀E: 4) ¡

S[**x**,**y**] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 6 (()E: 5) ¡

((**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**])
,! 7 (∀E: C2.2) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]
,! 8 (()E: 7) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 9 (∀E: P2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 10 (()E: 9) ¡

S[**x**,**y**] ,! 11 (Prem) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 12 (⇔E: 6) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 13 (⇒E: 11,12) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]
,! 14 (⇔E: 8) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 15 (⇒E: 13,14) ¡

R[**x**,**y**] ,! 16 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 17 (∨I: 16) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**)
,! 18 (⇒I: 16,17) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 19 (Prem) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 20 (⇔E: 10) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 21 (⇒E: 19,20) ¡

(**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 22 (()I: 21) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 23 (∨I: 22) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**)
,! 24 (⇒I: 19,23) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 25 (∨E: 15,18,24)
¡

S[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 26 (⇒I: 11,25) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 27 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 28 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 29 (∨I: 28) ¡

R[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 30 (⇒I: 28,29) ¡

(x = a & y = b) ,! 31 (Prem) ¡

x = a & y = b ,! 32 (()E: 31) ¡

x = a & y = b ⇒ (a ▪ b)[x,y] ,! 33 (⇔E: 10) ¡

(a ▪ b)[x,y] ,! 34 (⇒E: 32,33) ¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 35 (∨I: 34) ¡

(x = a & y = b) ⇒ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y]
,! 36 (⇒I: 31,35) ¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 37 (∨E: 27,30,36)
¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ⇒ (R ⊔ (a ▪ b))[x,y]
,! 38 (⇔E: 8) ¡

(R ⊔ (a ▪ b))[x,y] ,! 39 (⇒E: 37,38) ¡

(R ⊔ (a ▪ b))[x,y] ⇒ S[x,y] ,! 40 (⇔E: 6) ¡

S[x,y] ,! 41 (⇒E: 39,40) ¡

R[x,y] ∨ (x = a & y = b) ⇒ S[x,y] ,! 42 (⇒I: 27,41) ¡

S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b) ,! 43 (⇔I: 26,42) ¡

(S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
,! 44 (()I: 43) ¡

∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
,! 45 (∀I: 3,44) ¡

S ≣ (R ⊔ (a ▪ b))
⇒ ∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
,! 46 (⇒I: 2,45) ¡

(S ≣ (R ⊔ (a ▪ b))
⇒ ∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b)))
,! 47 (()I: 46) ¡

∀R∀S∀a∀b (S ≣ (R ⊔ (a ▪ b))
⇒ ∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b)))
! 48 (∀I: 1,47) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b (∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))

⇒ S ≣ (R ⊔ (a ▪ b))) ¡

R,S,a,b ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
,! 2 (Prem) ¡

x,y ,! 3 (Prem) ¡

(S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
,! 4 (∀E: 2) ¡

S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b) ,! 5 (()E: 4) ¡

((a ▪ b)[x,y] ⇔ x = a & y = b)
,! 6 (∀E: P2) ¡

(a ▪ b)[x,y] ⇔ x = a & y = b ,! 7 (()E: 6) ¡

((R ⊔ (a ▪ b))[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y])
,! 8 (∀E: C2.2) ¡

(R ⊔ (a ▪ b))[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y]
,! 9 (()E: 8) ¡

S[x,y] ,! 10 (Prem) ¡

S[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ (x = a & y = b)
,! 11 (⇔E: 5) ¡

R[x,y] ∨ (x = a & y = b) ,! 12 (⇒E: 10,11) ¡

R[x,y] ,! 13 (Prem) ¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 14 (∨I: 13) ¡

R[x,y] ⇒ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 15 (⇒I: 13,14) ¡

(x = a & y = b) ,! 16 (Prem) ¡

x = a & y = b ,! 17 (()E: 16) ¡

x = a & y = b ⇒ (a ▪ b)[x,y] ,! 18 (⇔E: 7) ¡

(a ▪ b)[x,y] ,! 19 (⇒E: 17,18) ¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 20 (∨I: 19) ¡

(x = a & y = b) ⇒ R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y]
,! 21 (⇒I: 16,20) ¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 22 (∨E: 12,15,21)
¡

R[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ⇒ (R ⊔ (a ▪ b))[x,y]

,! 23 (⇔E: 9) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 24 (⇒E: 22,23) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 25 (⇒I: 10,24) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 26 (Prem) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**]
,! 27 (⇔E: 9) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 28 (⇒E: 26,27) ¡

R[**x**,**y**] ,! 29 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 30 (∨I: 29) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**)
,! 31 (⇒I: 29,30) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 32 (Prem) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 33 (⇔E: 7) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 34 (⇒E: 32,33) ¡

(**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 35 (()I: 34) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 36 (∨I: 35) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**)
,! 37 (⇒I: 32,36) ¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ,! 38 (∨E: 28,31,37)
¡

R[**x**,**y**] ∨ (**x** = **a** & **y** = **b**) ⇒ **S**[**x**,**y**]
,! 39 (⇔E: 5) ¡

S[**x**,**y**] ,! 40 (⇒E: 38,39) ¡

(**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**] ,! 41 (⇒I: 26,40) ¡

S[**x**,**y**] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**] ,! 42 (⇔I: 25,41) ¡

(**S**[**x**,**y**] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[**x**,**y**]) ,! 43 (()I: 42) ¡

∀x∀y (**S**[x,y] ⇔ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))[x,y]) ,! 44 (∀I: 3,43) ¡

S ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**)) ,! 45 (𝕊I: C1.5,44) ¡

∀x∀y (**S**[x,y] ⇔ **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**))
⇒ **S** ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))
,! 46 (⇒I: 2,45) ¡

(∀x∀y (**S**[x,y] ⇔ **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**))
⇒ **S** ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**)))
,! 47 (()I: 46) ¡

∀R∀S∀a∀b (∀x∀y (S[x,y] ⇔ R[x,y] ∨ (x = a & y = b))
⇒ S ≣ (R ⊔ (a ▪ b)))
! 48 (∀I: 1,47) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b {x,y : R[x,y] ∨ (x = a & y = b)} ≣ (R ⊔ (a ▪ b)) ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ({u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)}[x,y]
⇔ **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**))
,! 2 (Pred) ¡

(∀x∀y ({u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)}[x,y]
⇔ **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**))
⇒ {u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)} ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**)))
,! 3 (∀E: P15) ¡

∀x∀y ({u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)}[x,y]
⇔ **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**))
⇒ {u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)} ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))
,! 4 (()E: 3) ¡

{u,v : **R**[u,v] ∨ (u = **a** & v = **b**)} ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

{x,y : **R**[x,y] ∨ (x = **a** & y = **b**)} ≣ (**R** ⊔ (**a** ▪ **b**))
,! 6 (Exch: 5) ¡

∀R∀a∀b {x,y : R[x,y] ∨ (x = a & y = b)} ≣ (R ⊔ (a ▪ b))
,! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀a∀b ((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y** ,! 2 (Prem) ¡

(((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇔ (**a** ▪ **b**)[**y**,**x**]) ,! 3 (∀E: C3.2) ¡

((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇔ (**a** ▪ **b**)[**y**,**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

((**a** ▪ **b**)[**y**,**x**] ⇔ **y** = **a** & **x** = **b**) ,! 5 (∀E: P2) ¡

(**a** ▪ **b**)[**y**,**x**] ⇔ **y** = **a** & **x** = **b**	,! 6 (()E: 5)	¡
((**b** ▪ **a**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **b** & **y** = **a**)	,! 7 (∀E: P2)	¡
(**b** ▪ **a**)[**x**,**y**] ⇔ **x** = **b** & **y** = **a**	,! 8 (()E: 7)	¡
((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**]	,! 9 (Prem)	¡
((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇒ (**a** ▪ **b**)[**y**,**x**]	,! 10 (⇔E: 4)	¡
(**a** ▪ **b**)[**y**,**x**]	,! 11 (⇒E: 9,10)	¡
(**a** ▪ **b**)[**y**,**x**] ⇒ **y** = **a** & **x** = **b**	,! 12 (⇔E: 6)	¡
y = **a** & **x** = **b**	,! 13 (⇒E: 11,12)	¡
y = **a**	,! 14 (&E: 13)	¡
x = **b**	,! 15 (&E: 13)	¡
x = **b** & **y** = **a**	,! 16 (&I: 14,15)	¡
x = **b** & **y** = **a** ⇒ (**b** ▪ **a**)[**x**,**y**]	,! 17 (⇔E: 8)	¡
(**b** ▪ **a**)[**x**,**y**]	,! 18 (⇒E: 16,17)	¡
((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇒ (**b** ▪ **a**)[**x**,**y**]	,! 19 (⇒I: 9,18)	¡
(**b** ▪ **a**)[**x**,**y**]	,! 20 (Prem)	¡
(**b** ▪ **a**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **b** & **y** = **a**	,! 21 (⇔E: 8)	¡
x = **b** & **y** = **a**	,! 22 (⇒E: 20,21)	¡
x = **b**	,! 23 (&E: 22)	¡
y = **a**	,! 24 (&E: 22)	¡
y = **a** & **x** = **b**	,! 25 (&I: 23,24)	¡
y = **a** & **x** = **b** ⇒ (**a** ▪ **b**)[**y**,**x**]	,! 26 (⇔E: 6)	¡
(**a** ▪ **b**)[**y**,**x**]	,! 27 (⇒E: 25,26)	¡
(**a** ▪ **b**)[**y**,**x**] ⇒ ((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**]	,! 28 (⇔E: 4)	¡
((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**]	,! 29 (⇒E: 27,28)	¡
(**b** ▪ **a**)[**x**,**y**] ⇒ ((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**]	,! 30 (⇒I: 20,29)	¡
((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇔ (**b** ▪ **a**)[**x**,**y**]	,! 31 (⇔I: 19,30)	¡
(((**a** ▪ **b**)*)[**x**,**y**] ⇔ (**b** ▪ **a**)[**x**,**y**])	,! 32 (()I: 31)	¡

∀x∀y (((**a** ▪ **b**)*)[x,y] ⇔ (**b** ▪ **a**)[x,y])

,! 33 (∀I: 2,32) ¡

((**a** ▪ **b**)*) ≣ (**b** ▪ **a**) ,! 34 (𝕊I: C1.5,33) ¡

∀a∀b ((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ! 35 (∀I: 1,34) ¡

▯

! **18.** ¡

⊦ ∀a∀b ((a ▪ b)ᴰ) ≡ (a•) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**] & ∀x(((**a** ▪ **b**)ᴰ)[x] ⇒ x = **a**)
⇒ ((**a** ▪ **b**)ᴰ) ≡ (**a**•))
,! 2 (∀E: II8.22) ¡

((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**] & ∀x(((**a** ▪ **b**)ᴰ)[x] ⇒ x = **a**)
⇒ ((**a** ▪ **b**)ᴰ) ≡ (**a**•)
,! 3 (()E: 2) ¡

! To show: ((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**] ¡

(**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ,! 4 (∀E: P5) ¡

((**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ⇒ ((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**]) ,! 5 (∀E: C5.5) ¡

(**a** ▪ **b**)[**a**,**b**] ⇒ ((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**] ,! 6 (()E: 5) ¡

((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**a**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

! To show: ∀x(((**a** ▪ **b**)ᴰ)[x] ⇒ x = **a**) ¡

x ,! 8 (Prem) ¡

((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**x**] ,! 9 (Prem) ¡

(((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**x**] ⇒ ∃y (**a** ▪ **b**)[**x**,y]) ,! 10 (∀E: C5.3) ¡

((**a** ▪ **b**)ᴰ)[**x**] ⇒ ∃y (**a** ▪ **b**)[**x**,y] ,! 11 (()E: 10) ¡

∃y (**a** ▪ **b**)[**x**,y] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 13 (∃E: 12) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 14 (∀E: P3) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 15 (()E: 14) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

x = **a** ,! 17 (&E: 16) ¡

((a ▪ b)^{D})[x] ⇒ x = a ,! 18 (⇒E: 9,17) ¡

(((a ▪ b)^{D})[x] ⇒ x = a) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀x(((a ▪ b)^{D})[x] ⇒ x = a) ,! 20 (∀I: 8,19) ¡

! Conclusion. ¡

((a ▪ b)^{D})[a] & ∀x(((a ▪ b)^{D})[x] ⇒ x = a)
,! 21 (&I: 7,20) ¡

((a ▪ b)^{D}) ≡ (a$^{\bullet}$) ,! 22 (⇒E: 3,21) ¡

∀a∀b ((a ▪ b)^{D}) ≡ (a$^{\bullet}$) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ∀a∀b ((a ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{\bullet}$) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((a ▪ b)^{I}) ≡ (((a ▪ b)*)^{D}) ,! 2 (∀E: C6.15) ¡

((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ,! 3 (∀E: P17) ¡

(((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ⇒ (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D}))
,! 4 (∀E: C5.15) ¡

((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ⇒ (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D})
,! 5 (()E: 4) ¡

(((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D}) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

((a ▪ b)^{I}) ≡ (((a ▪ b)*)^{D}) & (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D})
,! 7 (&I: 2,6) ¡

((b ▪ a)^{D}) ≡ (b$^{\bullet}$) ,! 8 (∀E: P18) ¡

((a ▪ b)^{I}) ≡ (((a ▪ b)*)^{D}) & (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D})
& ((b ▪ a)^{D}) ≡ (b$^{\bullet}$)
,! 9 (&I: 7,8) ¡

(((a ▪ b)^{I}) ≡ (((a ▪ b)*)^{D}) & (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D})
& ((b ▪ a)^{D}) ≡ (b$^{\bullet}$)
⇒ ((a ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{\bullet}$))
,! 10 (∀E: II1.21) ¡

((a ▪ b)^{I}) ≡ (((a ▪ b)*)^{D}) & (((a ▪ b)*)^{D}) ≣ ((b ▪ a)^{D})
& ((b ▪ a)^{D}) ≡ (b$^{\bullet}$)
⇒ ((a ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{\bullet}$)
,! 11 (()E: 4) ¡

((a ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$) ,! 12 (⇒E: 3,5) ¡

∀a∀b ((a ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **20.** ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b∀x (¬ (R^{I})[a] & S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) & ¬ a = b
⇒ ¬ (S^{I})[a]) ¡

R,S,a,b,x ,! 1 (Prem) ¡

¬ (R^{I})[a] & S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) & ¬ a = b
,! 2 (Prem) ¡

¬ (R^{I})[a] ,! 3 (&E: 2) ¡

S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ a = b ,! 5 (&E: 2) ¡

(S^{I})[a] ,! 6 (Prem) ¡

(S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) ⇒ (S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}))
,! 7 (∀E: C6.22) ¡

S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) ⇒ (S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I})
,! 8 (()E: 7) ¡

(S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ,! 9 (⇒E: 4,8) ¡

(R^{I}) ≡ (R^{I}) ,! 10 (∀E: II1.9) ¡

((x ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$) ,! 11 (∀E: P19) ¡

(R^{I}) ≡ (R^{I}) & ((x ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$) ,! 12 (&I: 10,11) ¡

((R^{I}) ≡ (R^{I}) & ((x ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$)
⇒ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{•}$)))
,! 13 (∀E: C6.26) ¡

(R^{I}) ≡ (R^{I}) & ((x ▪ b)^{I}) ≡ (b$^{•}$)
⇒ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{•}$))
,! 14 (()E: 13) ¡

((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{•}$)) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I})
& ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{•}$))
,! 16 (&I: 9,15) ¡

((S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I})
& ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))
⇒ (S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$)))
,! 17 (∀E: II1.15) ¡

(S^{I}) ≡ ((R ⊔ (x ▪ b))^{I})
& ((R ⊔ (x ▪ b))^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))
⇒ (S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))
,! 18 (()E: 17) ¡

(S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$)) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

(S^{I})[a] & (S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$)) ,! 20 (&I: 6,19) ¡

((S^{I})[a] & (S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$)) ⇒ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a])
,! 21 (∀E: II1.35) ¡

(S^{I})[a] & (S^{I}) ≡ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$)) ⇒ ((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a]
,! 22 (()E: 21) ¡

((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a] & ¬ (R^{I})[a] ,! 24 (&I: 3,23) ¡

(((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a] & ¬ (R^{I})[a] ⇒ (b$^{\bullet}$)[a])
,! 25 (∀E: II2.7) ¡

((R^{I}) ∪ (b$^{\bullet}$))[a] & ¬ (R^{I})[a] ⇒ (b$^{\bullet}$)[a]
,! 26 (()E: 25) ¡

(b$^{\bullet}$)[a] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

((b$^{\bullet}$)[a] ⇒ a = b) ,! 28 (∀E: II8.3) ¡

(b$^{\bullet}$)[a] ⇒ a = b ,! 29 (()E: 28) ¡

a = b ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

𝔉 ,! 31 (𝔉I: 5,30) ¡

(S^{I})[a] ⇒ 𝔉 ,! 32 (⇒I: 6,31) ¡

¬ (S^{I})[a] ,! 33 (¬I: 32) ¡

¬ (R^{I})[a] & S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) & ¬ a = b ⇒ ¬ (S^{I})[a]
,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

(¬ (R^{I})[a] & S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) & ¬ a = b ⇒ ¬ (S^{I})[a])
,! 35 (()I: 34) ¡

∀R∀S∀a∀b∀x (¬ (R^{I})[a] & S ≣ (R ⊔ (x ▪ b)) & ¬ a = b
⇒ ¬ (S^{I})[a])

! 36 (∀I: 1,35) ¡

▯

! **21.** Our pairing relationship is functional. ¡

⊦ ∀a∀b **f** (a ▪ b) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

x,**y**,**z** ,! 2 (Prem) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] & (**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ,! 3 (Prem) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ,! 4 (&E: 3) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 5 (∀E: P3) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 6 (()E: 5) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

y = **b** ,! 8 (&E: 7) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ,! 9 (&E: 3) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ⇒ **x** = **a** & **z** = **b**) ,! 10 (∀E: P3) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ⇒ **x** = **a** & **z** = **b** ,! 11 (()E: 10) ¡

x = **a** & **z** = **b** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

z = **b** ,! 13 (&E: 12) ¡

y = **z** ,! 14 (=E: 8,13) ¡

(**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] & (**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 15 (⇒I: 3,14) ¡

((**a** ▪ **b**)[**x**,**y**] & (**a** ▪ **b**)[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**)
,! 16 (()I: 15) ¡

∀x∀y∀z ((**a** ▪ **b**)[x,y] & (**a** ▪ **b**)[x,z] ⇒ y = z)
,! 17 (∀I: 2,16) ¡

f (**a** ▪ **b**) ,! 18 (𝕊E: C8.1) ¡

∀a∀b **f** (a ▪ b) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **22.** ¡

⊦ ∀a∀b (a ▪ b) 𝔽 (a•) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

((**a** ▪ **b**)^{D}) ≡ (**a**•) ,! 2 (∀E: P18) ¡

f (**a** ▪ **b**) ,! 3 (∀E: P21) ¡

((**a** ▪ **b**)ᴰ) ≡ (**a**•) & **f** (**a** ▪ **b**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**a** ▪ **b**) 𝔽 (**a**•) ,! 5 (𝕊I: C8.10,4) ¡

∀a∀b (a ▪ b) 𝔽 (a•) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **23.** ¡

⊢ ∀R∀a (R 𝔽 (a•) ⇒ ∃b R ≣ (a ▪ b)) ¡

R,**a** ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 (**a**•) ,! 2 (Prem) ¡

(**R**ᴰ) ≡ (**a**•) & **f** **R** ,! 3 (𝕊E: C8.10,2) ¡

(**R**ᴰ) ≡ (**a**•) ,! 4 (&E: 3) ¡

f **R** ,! 5 (&E: 3) ¡

((**R**ᴰ) ≡ (**a**•) ⇒ (**R**ᴰ)[**a**] & ∀x ((**R**ᴰ)[x] ⇒ x = **a**))
,! 6 (∀E: II8.20) ¡

(**R**ᴰ) ≡ (**a**•) ⇒ (**R**ᴰ)[**a**] & ∀x ((**R**ᴰ)[x] ⇒ x = **a**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(**R**ᴰ)[**a**] & ∀x ((**R**ᴰ)[x] ⇒ x = **a**) ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(**R**ᴰ)[**a**] ,! 9 (&E: 8) ¡

∀x ((**R**ᴰ)[x] ⇒ x = **a**) ,! 10 (&E: 8) ¡

((**R**ᴰ)[**a**] ⇒ ∃y **R**[**a**,y]) ,! 11 (∀E: C5.3) ¡

(**R**ᴰ)[**a**] ⇒ ∃y **R**[**a**,y] ,! 12 (()E: 11) ¡

∃y **R**[**a**,y] ,! 13 (⇒E: 9,12) ¡

R[**a**,**b**] ,! 14 (∃E: 13) ¡

(**R**[**a**,**b**] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**) ⇒ **R** ≣ (**a** ▪ **b**))
,! 15 (∀E: P12) ¡

R[**a**,**b**] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**) ⇒ **R** ≣ (**a** ▪ **b**)
,! 16 (()E: 15) ¡

x,**y** ,! 17 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 18 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{D})[**x**]) ,! 19 (∀E: C5.5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{D})[**x**] ,! 20 (()E: 19) ¡

(**R**^{D})[**x**] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((**R**^{D})[**x**] ⇒ **x** = **a**) ,! 22 (∀E: 10) ¡

(**R**^{D})[**x**] ⇒ **x** = **a** ,! 23 (()E: 22) ¡

x = **a** ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

R[**a**,**y**] ,! 25 (=E: 18,24) ¡

f **R** & **R**[**a**,**y**] ,! 26 (&I: 5,25) ¡

f **R** & **R**[**a**,**y**] & **R**[**a**,**b**] ,! 27 (&I: 14,26) ¡

(**f** **R** & **R**[**a**,**y**] & **R**[**a**,**b**] ⇒ **y** = **b**)
,! 28 (∀E: C8.2) ¡

f **R** & **R**[**a**,**y**] & **R**[**a**,**b**] ⇒ **y** = **b** ,! 29 (()E: 28) ¡

y = **b** ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

x = **a** & **y** = **b** ,! 31 (&I: 24,30) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b** ,! 32 (⇒I: 18,31) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ **x** = **a** & **y** = **b**) ,! 33 (()I: 32) ¡

∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**) ,! 34 (∀I: 17,33) ¡

R[**a**,**b**] & ∀x∀y(R[x,y] ⇒ x = **a** & y = **b**)
,! 35 (&I: 14,34) ¡

R ≣ (**a** ▪ **b**) ,! 36 (⇒E: 16,35) ¡

∃b **R** ≣ (**a** ▪ b) ,! 37 (∃I: 36) ¡

R 𝔽 (**a**$^{\bullet}$) ⇒ ∃b **R** ≣ (**a** ▪ b) ,! 38 (⇒I: 2,37) ¡

(**R** 𝔽 (**a**$^{\bullet}$) ⇒ ∃b **R** ≣ (**a** ▪ b)) ,! 39 (()I: 38) ¡

∀R∀a (R 𝔽 (a$^{\bullet}$) ⇒ ∃b R ≣ (a ▪ b)) ! 40 (∀I: 1,39) ¡

▯

! **24.** ¡

⊦ ∀a∀b ((a ▪ b)´a) = b ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

f (**a** ▪ **b**) ,! 2 (∀E: P21) ¡

(a ▪ b)[a,b] ,! 3 (∀E: P5) ¡

f (a ▪ b) & (a ▪ b)[a,b] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(f (a ▪ b) & (a ▪ b)[a,b] ⇒ ((a ▪ b)´a) = b)
,! 5 (∀E: C8.22) ¡

f (a ▪ b) & (a ▪ b)[a,b] ⇒ ((a ▪ b)´a) = b
,! 6 (()E: 5) ¡

((a ▪ b)´a) = b ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀a∀b ((a ▪ b)´a) = b ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **25.** Our pairing relationship is one-to-one. ¡

⊦ ∀a∀b **1** (a ▪ b) ¡

a,b ,! 1 (Prem) ¡

f (b ▪ a) ,! 2 (∀E: P21) ¡

((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ,! 3 (∀E: P17) ¡

f (b ▪ a) & ((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(f (b ▪ a) & ((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ⇒ 1 (a ▪ b))
,! 5 (∀E: C9.16) ¡

f (b ▪ a) & ((a ▪ b)*) ≣ (b ▪ a) ⇒ 1 (a ▪ b)
,! 6 (()E: 5) ¡

1 (a ▪ b) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀a∀b **1** (a ▪ b) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **26.** ¡

⊦ ∀a∀b (a ▪ b) 𝟙 (b•) ¡

a,b ,! 1 (Prem) ¡

((a ▪ b)I) ≡ (b•) ,! 2 (∀E: P19) ¡

1 (a ▪ b) ,! 3 (∀E: P25) ¡

((a ▪ b)I) ≡ (b•) & 1 (a ▪ b) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(a ▪ b) 𝟙 (b•) ,! 5 (𝕊I: C9.19,4) ¡

∀a∀b (a ▪ b) 𝟙 (b•) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯