!CHAPTER 14

PAIR REMOVAL¡

! This chapter introduces the notion of pair removal. **x** holds **y** to (**R** ι **a** **b**) if and only if **x** holds **y** to **R** and the pair **x** and **y** is the not the same as the pair **a** and **b**. That is, the pair **a** and **b** is removed from **R** (if it satisfied **R** to begin with). ¡

! **1.** ι represents pair removal. ¡

𝔻 ι ; (**R** ι **a** **b**) ; ; {a,b : R[a,b] & (¬ a = **a** ∨ ¬ b = **b**) } ¡

! **2. Fundamental Proposition of Pair Removal.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇔ R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b))
¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ({a,b : **R**[a,b] & (¬ a = **a** ∨ ¬ b = **b**) }[x,y]
⇔ **R**[x,y] & (¬ x = **a** ∨ ¬ y = **b**))
,! 2 (Pred) ¡

∀x∀y ((**R** ι **a** **b**)[x,y] ⇔ **R**[x,y] & (¬ x = **a** ∨ ¬ y = **b**))
,! 3 (𝔻I: P1,1) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇔ R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b))
! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3. Fundamental Proposition of Pair Removal, First Half.**
¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇒ R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b))
¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**))
,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**)
,! 3 (()E: 2) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**)
,! 4 (⇔E: 3) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**))
,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇒ R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b))
! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4. Fundamental Proposition of Pair Removal, Second Half.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ⇒ (R ι a b)[x,y]) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**)) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇔ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 3 (()E: 2) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ⇒ (R ι a b)[x,y]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇒ R[x,y]) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**)) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 4 (()E: 3) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R[**x**,**y**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y ((R ι a b)[x,y] ⇒ R[x,y]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & ¬ x = a ⇒ (R ι a b)[x,y]) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] & ¬ **x** = **a** ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **x** = **a** ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b** ,! 5 (∨I: 4) ¡

(¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 6 (()I: 5) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(**R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 8 (∀E: P4) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R[**x**,**y**] & ¬ **x** = **a** ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R**[**x**,**y**] & ¬ **x** = **a** ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & ¬ x = a ⇒ (R ι a b)[x,y])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & ¬ y = b ⇒ (R ι a b)[x,y]) ¡

R,**a**,**b**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] & ¬ **y** = **b** ,! 2 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **y** = **b** ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b** ,! 5 (∨I: 4) ¡

(¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 6 (()I: 5) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(**R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 8 (∀E: P4) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 9 (()E: 8) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R[**x**,**y**] & ¬ **y** = **b** ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R**[**x**,**y**] & ¬ **y** = **b** ⇒ (**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀a∀b∀x∀y (R[x,y] & ¬ y = b ⇒ (R ι a b)[x,y])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **8.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b ¬ (R ι a b)[a,b] ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**a**,**b**] ,! 2 (Prem) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**a**,**b**] ⇒ **R**[**a**,**b**] & (¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**))
,! 3 (∀E: P3) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**a**,**b**] ⇒ **R**[**a**,**b**] & (¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**)
,! 4 (()E: 3) ¡

R[**a**,**b**] & (¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**) ,! 6 (&E: 5) ¡

a = **a** ,! 7 (=I) ¡

(¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**) & **a** = **a** ,! 8 (&I: 6,7) ¡

((¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**) & **a** = **a** ⇒ ¬ **b** = **b**)
,! 9 (∀E: I3.7) ¡

(¬ **a** = **a** ∨ ¬ **b** = **b**) & **a** = **a** ⇒ ¬ **b** = **b**
,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **b** = **b** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

b = **b** ,! 12 (=I) ¡

𝔉 ,! 13 (𝔉I: 11,12) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**a**,**b**] ⇒ 𝔉 ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

¬ (**R** ι **a** **b**)[**a**,**b**] ,! 15 (¬I: 14) ¡

∀R∀a∀b ¬ (R ι a b)[a,b] ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **9.** ¡

⊦ ∀R∀a∀b (R ι a b) ⫅ R ¡

R,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

∀x∀y ((**R** ι **a** **b**)[x,y] ⇒ **R**[x,y]) ,! 2 (∀E: P5) ¡

(**R** ι **a** **b**) ⫅ **R** ,! 3 (⫅I: C1.1,2) ¡

∀R∀a∀b (R ι a b) ⫅ R ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **10.** ¡

⊢ ∀R∀S∀a∀b (R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b)) ¡

R,**S**,**a**,**b** ,! 1 (Prem) ¡

R ⫅ **S** ,! 2 (Prem) ¡

x,**y** ,! 3 (Prem) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 4 (Prem) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**))
,! 5 (∀E: P3) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**)
,! 6 (()E: 5) ¡

R[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R[**x**,**y**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 9 (&E: 7) ¡

R[**x**,**y**] & **R** ⫅ **S** ,! 10 (&I: 2,8) ¡

(**R**[**x**,**y**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**]) ,! 11 (∀E: C1.2) ¡

R[**x**,**y**] & **R** ⫅ **S** ⇒ **S**[**x**,**y**] ,! 12 (()E: 11) ¡

S[**x**,**y**] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

S[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ,! 14 (&I: 9,13) ¡

(**S**[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**S** ι **a** **b**)[**x**,**y**])
,! 15 (∀E: P4) ¡

S[**x**,**y**] & (¬ **x** = **a** ∨ ¬ **y** = **b**) ⇒ (**S** ι **a** **b**)[**x**,**y**]
,! 16 (()E: 15) ¡

(**S** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**S** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ,! 18 (⇒I: 4,17) ¡

((**R** ι **a** **b**)[**x**,**y**] ⇒ (**S** ι **a** **b**)[**x**,**y**]),! 19 (()I: 18) ¡

∀x∀y ((**R** ι **a** **b**)[x,y] ⇒ (**S** ι **a** **b**)[x,y])

,! 20 (∀I: 3,19) ¡

(R ι a b) ⫅ (S ι a b) ,! 21 (𝕊I: C1.1,20) ¡

R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b) ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b)) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀R∀S∀a∀b (R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ ∀R∀S∀a∀b (R ≣ S ⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b)) ¡

R,S,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ S ,! 2 (Prem) ¡

(R ≣ S ⇒ R ⫅ S & S ⫅ R) ,! 3 (∀E: C1.11) ¡

R ≣ S ⇒ R ⫅ S & S ⫅ R ,! 4 (()E: 3) ¡

R ⫅ S & S ⫅ R ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

R ⫅ S ,! 6 (&E: 5) ¡

S ⫅ R ,! 7 (&E: 5) ¡

(R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b)) ,! 8 (∀E: P10) ¡

R ⫅ S ⇒ (R ι a b) ⫅ (S ι a b) ,! 9 (()E: 8) ¡

(R ι a b) ⫅ (S ι a b) ,! 10 (⇒E: 6,9) ¡

(S ⫅ R ⇒ (S ι a b) ⫅ (R ι a b)) ,! 11 (∀E: P10) ¡

S ⫅ R ⇒ (S ι a b) ⫅ (R ι a b) ,! 12 (()E: 11) ¡

(S ι a b) ⫅ (R ι a b) ,! 13 (⇒E: 7,12) ¡

(R ι a b) ⫅ (S ι a b) & (S ι a b) ⫅ (R ι a b)
,! 14 (&I: 10,13) ¡

((R ι a b) ⫅ (S ι a b) & (S ι a b) ⫅ (R ι a b)
⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b))
,! 15 (∀E: C1.6) ¡

(R ι a b) ⫅ (S ι a b) & (S ι a b) ⫅ (R ι a b)
⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b)
,! 16 (()E: 15) ¡

(R ι a b) ≣ (S ι a b) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

R ≣ S ⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b) ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(R ≣ S ⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b)) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀R∀S∀a∀b (R ≣ S ⇒ (R ι a b) ≣ (S ι a b))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **12.** If the pair a and b is removed (having satisfied R), then putting it back in gets back R. Remark that, if the pair did not satisfy R, then removing it and putting it back in, would result in a relationship which is now satisfied by the pair, and so is not equivalent to the original. ¡

⊢ ∀R∀a∀b (R[a,b] ⇒ R ≣ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))) ¡

R,a,b ,! 1 (Prem) ¡

R[a,b] ,! 2 (Prem) ¡

(R ι a b) ⫅ R ,! 3 (∀E: P9) ¡

(R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⫅ R) ,! 4 (∀E: C12.7) ¡

R[a,b] ⇒ (a ▪ b) ⫅ R ,! 5 (()E: 4) ¡

(a ▪ b) ⫅ R ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

(R ι a b) ⫅ R & (a ▪ b) ⫅ R ,! 7 (&I: 3,6) ¡

((R ι a b) ⫅ R & (a ▪ b) ⫅ R
⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) ⫅ R)
,! 8 (∀E: C2.9) ¡

(R ι a b) ⫅ R & (a ▪ b) ⫅ R ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) ⫅ R
,! 9 (()E: 8) ¡

((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) ⫅ R ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

x,y ,! 11 (Prem) ¡

R[x,y] ,! 12 (Prem) ¡

((a ▪ b)[x,y] ∨ ¬ (a ▪ b)[x,y]) ,! 13 (∀E: I3.18) ¡

(a ▪ b)[x,y] ∨ ¬ (a ▪ b)[x,y] ,! 14 (()E: 13) ¡

(a ▪ b)[x,y] ,! 15 (Prem) ¡

(R ι a b)[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 16 (∨I: 15) ¡

(a ▪ b)[x,y] ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y]
,! 17 (⇒I: 15,16) ¡

¬ (a ▪ b)[x,y] ,! 18 (Prem) ¡

(¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b)
,! 19 (∀E: C12.6) ¡

¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ¬ x = a ∨ ¬ y = b
,! 20 (()E: 19) ¡

¬ x = a ∨ ¬ y = b ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

(¬ x = a ∨ ¬ y = b) ,! 22 (()I: 21) ¡

R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ,! 23 (&I: 12,22) ¡

(R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ⇒ (R ι a b)[x,y])
,! 24 (∀E: P4) ¡

R[x,y] & (¬ x = a ∨ ¬ y = b) ⇒ (R ι a b)[x,y]
,! 25 (()E: 24) ¡

(R ι a b)[x,y] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

(R ι a b)[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y] ,! 27 (∨I: 26) ¡

((R ι a b)[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y]
⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y])
,! 28 (∀E: C2.4) ¡

(R ι a b)[x,y] ∨ (a ▪ b)[x,y]
⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y]
,! 29 (()E: 28) ¡

((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

¬ (a ▪ b)[x,y] ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y]
,! 31 (⇒I: 18,30) ¡

((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y] ,! 32 (∨E: 14,17,31)
¡

R[x,y] ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y]
,! 33 (⇒I: 12,32) ¡

(R[x,y] ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y])
,! 34 (()I: 33) ¡

∀x∀y (R[x,y] ⇒ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b))[x,y])
,! 35 (∀I: 11,34) ¡

R ⫅ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) ,! 36 (𝕊I: C1.1,35) ¡

R ⫅ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) & ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)) ⫅ R
,! 37 (&I: 10,36) ¡

(**R** ⊆ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) & ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) ⊆ **R**
⇒ **R** ≡ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)))
,! 38 (∀E: C1.6) ¡

R ⊆ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) & ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) ⊆ **R**
⇒ **R** ≡ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**))
,! 39 (()E: 38) ¡

R ≡ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

R[**a**,**b**] ⇒ **R** ≡ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**)) ,! 41 (⇒I: 2,40) ¡

(**R**[**a**,**b**] ⇒ **R** ≡ ((**R** ι **a** **b**) ⊔ (**a** ▪ **b**))) ,! 42 (()I: 41) ¡

∀R∀a∀b (R[a,b] ⇒ R ≡ ((R ι a b) ⊔ (a ▪ b)))
! 43 (∀I: 1,42) ¡

▯

! P13 through P16 speak about the images of pair removals. ¡

! **13.** ¡

⊢ ∀R∀u∀a (**1** R & R[u,a] ⇒ ¬ ((R ι u a)^{I})[a]) ¡

R,**u**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

1 **R** & **R**[**u**,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ,! 3 (Prem) ¡

(((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ⇒ ∃x (**R** ι **u** **a**)[x,**a**])
,! 4 (∀E: C6.3) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ⇒ ∃x (**R** ι **u** **a**)[x,**a**] ,! 5 (()E: 4) ¡

∃x (**R** ι **u** **a**)[x,**a**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(**R** ι **u** **a**)[**x**,**a**] ,! 7 (∃E: 6) ¡

((**R** ι **u** **a**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**a**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**))
,! 8 (∀E: P3) ¡

(**R** ι **u** **a**)[**x**,**a**] ⇒ **R**[**x**,**a**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**)
,! 9 (()E: 8) ¡

R[**x**,**a**] & (¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

R[**x**,**a**] ,! 11 (&E: 10) ¡

(¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**) ,! 12 (&E: 10) ¡

1 **R** & **R**[**x**,**a**] & **R**[**u**,**a**] ,! 13 (&I: 2,11) ¡

(1 **R** & **R**[**x**,**a**] & **R**[**u**,**a**] ⇒ **x** = **u**) ,! 14 (∀E: C9.2) ¡

1 **R** & **R**[**x**,**a**] & **R**[**u**,**a**] ⇒ **x** = **u** ,! 15 (()E: 14) ¡

x = **u** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**) & **x** = **u** ,! 17 (&I: 12,16) ¡

((¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**) & **x** = **u** ⇒ ¬ **a** = **a**)
,! 18 (∀E: I3.7) ¡

(¬ **x** = **u** ∨ ¬ **a** = **a**) & **x** = **u** ⇒ ¬ **a** = **a**
,! 19 (()E: 18) ¡

¬ **a** = **a** ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

a = **a** ,! 21 (=I) ¡

ℑ ,! 22 (ℑI: 20,21) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ⇒ ℑ ,! 23 (⇒I: 3,22) ¡

¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ,! 24 (¬I: 23) ¡

1 **R** & **R**[**u**,**a**] ⇒ ¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

(1 **R** & **R**[**u**,**a**] ⇒ ¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀R∀u∀a (1 R & R[u,a] ⇒ ¬ ((R ι u a)^{I})[a])
! 27 (∀I: 1,26) ¡

□

! **14.** ¡

⊢ ∀R∀u∀a (¬ ((R ι u a)^{I})[a] ⇒ ((R ι u a)^{I}) ≡ ((R^{I}) \ (a$^{\bullet}$)))
¡

R,**u**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ⇔ (**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a**)
,! 4 (∀E: II8.48) ¡

((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ⇔ (**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a**
,! 5 (()E: 4) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] ,! 6 (Prem) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**]
,! 7 (&I: 2,6) ¡

(((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ⇒ ¬ **x** = **a**)
,! 8 (∀E: I3.17) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ¬ ((**R** ι **u** **a**)^{I})[**a**] ⇒ ¬ **x** = **a**
,! 9 (()E: 8) ¡

¬ **x** = **a** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**R** ι **u** **a**) ⫅ **R** ,! 11 (∀E: P9) ¡

((**R** ι **u** **a**) ⫅ **R** ⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I}))
,! 12 (∀E: C6.20) ¡

(**R** ι **u** **a**) ⫅ **R** ⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I})
,! 13 (()E: 12) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I}) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I})
,! 15 (&I: 6,14) ¡

(((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I}) ⇒ (**R**^{I})[**x**])
,! 16 (∀E: II1.2) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] & ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ⊆ (**R**^{I}) ⇒ (**R**^{I})[**x**]
,! 17 (()E: 16) ¡

(**R**^{I})[**x**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a** ,! 19 (&I: 10,18) ¡

(**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a** ⇒ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**]
,! 20 (⇔E: 5) ¡

((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ,! 21 (⇒E: 19,20) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I})[**x**] ⇒ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ,! 22 (⇒I: 6,21) ¡

((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ,! 23 (Prem) ¡

((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))[**x**] ⇒ (**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a**
,! 24 (⇔E: 5) ¡

(**R**^{I})[**x**] & ¬ **x** = **a** ,! 25 (⇒E: 23,24) ¡

(**R**^{I})[**x**] ,! 26 (&I: 25) ¡

¬ **x** = **a** ,! 27 (&I: 25) ¡

((**R**^{I})[**x**] ⇒ ∃x **R**[x,**x**]) ,! 28 (∀E: C6.3) ¡

(**R**^{I})[**x**] ⇒ ∃x **R**[x,**x**] ,! 29 (()E: 28) ¡

∃x R[x,x] ,! 30 (⇒E: 26,29) ¡

R[c,x] ,! 31 (∃E: 30) ¡

R[c,x] & ¬ x = a ,! 32 (&I: 27,31) ¡

(R[c,x] & ¬ x = a ⇒ (R ι u a)[c,x])
,! 33 (∀E: P7) ¡

R[c,x] & ¬ x = a ⇒ (R ι u a)[c,x]
,! 34 (()E: 33) ¡

(R ι u a)[c,x] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

((R ι u a)[c,x] ⇒ ((R ι u a)^I)[x])
,! 36 (∀E: C6.5) ¡

(R ι u a)[c,x] ⇒ ((R ι u a)^I)[x] ,! 37 (()E: 36) ¡

((R ι u a)^I)[x] ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

((R^I) \ (a•))[x] ⇒ ((R ι u a)^I)[x] ,! 39 (⇒I: 23,38) ¡

((R ι u a)^I)[x] ⇔ ((R^I) \ (a•))[x] ,! 40 (⇔I: 22,39) ¡

(((R ι u a)^I)[x] ⇔ ((R^I) \ (a•))[x])
,! 41 (()I: 40) ¡

∀x (((R ι u a)^I)[x] ⇔ ((R^I) \ (a•))[x])
,! 42 (∀I: 3,41) ¡

((R ι u a)^I) ≡ ((R^I) \ (a•)) ,! 43 (𝕊I: II1.7,42)
¡

¬ ((R ι u a)^I)[a] ⇒ ((R ι u a)^I) ≡ ((R^I) \ (a•))
,! 44 (⇒I: 2,43) ¡

(¬ ((R ι u a)^I)[a] ⇒ ((R ι u a)^I) ≡ ((R^I) \ (a•)))
,! 45 (()I: 44) ¡

∀R∀u∀a (¬ ((R ι u a)^I)[a] ⇒ ((R ι u a)^I) ≡ ((R^I) \ (a•)))
! 46 (∀I: 1,45) ¡

□

! **15.** P15 is a lemma for P16. ¡

⊢ ∀R∀u∀a (1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)^I) ≡ ((R^I) \ (a•))) ¡

R,u,a ,! 1 (Prem) ¡

1 R & R[u,a] ,! 2 (Prem) ¡

(1 R & R[u,a] ⇒ ¬ ((R ι u a)^I)[a]) ,! 3 (∀E: P13) ¡

1 R & R[u,a] ⇒ ¬ ((R ι u a)I)[a] ,! 4 (()E: 3) ¡

¬ ((R ι u a)I)[a] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(¬ ((R ι u a)I)[a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)))
,! 6 (∀E: P14) ¡

¬ ((R ι u a)I)[a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•))
,! 7 (()E: 6) ¡

((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•))
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀u∀a (1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! 16. ¡

⊢ ∀R∀S∀u∀v∀a (1 R & 1 S & R[u,a] & S[v,a] & (RI) ≡ (SI)
⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((S ι v a)I)) ¡

R,u,a ,! 1 (Prem) ¡

1 R & 1 S & R[u,a] & S[v,a] & (RI) ≡ (SI)
,! 2 (Prem) ¡

1 R ,! 3 (&E: 2) ¡

1 S ,! 4 (&E: 2) ¡

R[u,a] ,! 5 (&E: 2) ¡

S[v,a] ,! 6 (&E: 2) ¡

(RI) ≡ (SI) ,! 7 (&E: 2) ¡

1 R & R[u,a] ,! 8 (&I: 3,5) ¡

(1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)))
,! 9 (∀E: P15) ¡

1 R & R[u,a] ⇒ ((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•))
,! 10 (()E: 9) ¡

((R ι u a)I) ≡ ((RI) \ (a•)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

1 **S** & **S**[**v**,**a**] ,! 12 (&I: 4,6) ¡

(**1** **S** & **S**[**v**,**a**] ⇒ ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)))
,! 13 (∀E: P15) ¡

1 **S** & **S**[**v**,**a**] ⇒ ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
,! 14 (()E: 13) ¡

((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
,! 16 (&I: 11,15) ¡

((**R**^{I}) ≡⊏(**S**^{I}) ⇒ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)))
,! 17 (∀E: II7.34) ¡

(**R**^{I}) ≡⊏(**S**^{I}) ⇒ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
,! 18 (()E: 17) ¡

((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ,! 19 (⇒E: 7,18) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
,! 20 (&I: 16,19) ¡

(((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**S** ι **v** **a**)^{I}))
,! 21 (∀E: II1.22) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**R**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$)) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
& ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ≡ ((**S**^{I}) \ (**a**$^{\bullet}$))
⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**S** ι **v** **a**)^{I})
,! 22 (()E: 21) ¡

((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**S** ι **v** **a**)^{I}) ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

1 **R** & **1** **S** & **R**[**u**,**a**] & **S**[**v**,**a**] & (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I})
⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**S** ι **v** **a**)^{I})
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(**1** **R** & **1** **S** & **R**[**u**,**a**] & **S**[**v**,**a**] & (**R**^{I}) ≡ (**S**^{I})
⇒ ((**R** ι **u** **a**)^{I}) ≡ ((**S** ι **v** **a**)^{I}))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀R∀S∀u∀v∀a (**1** R & **1** S & R[u,a] & S[v,a] & (R^{I}) ≡ (S^{I})

$\Rightarrow ((R\ \iota\ u\ a)^I) \equiv ((S\ \iota\ v\ a)^I))$

! 26 ($\forall$I: 1,25) ¡

□