

! CHAPTER 6

IMAGES ;

! In this chapter relationship images are introduced. The image of  $R$ , written  $(R^I)$ , is satisfied by those things to which something bears  $R$ . i

! 1.  $I$  represents image. i

$\mathbb{D} \ I \ ; \ (R^I) \ ; \ ; \ \{b : \exists x R[x,b]\}$  i

! 2. **Fundamental Proposition of Images.** i

$\vdash \forall R \forall Y ( (R^I)[Y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  i

$R$  , ! 1 (Prem) i

$\forall y ( \{b : \exists x R[x,b]\}[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  , ! 2 (Pred) i

$\forall y ( (R^I)[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  , ! 3 ( $\mathbb{D}I$ : P1,2) i

$\forall R \forall Y ( (R^I)[Y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  ! 4 ( $\forall I$ : 1,3) i

□

! 3. **Fundamental Proposition of Images, First Half.** i

$\vdash \forall R \forall Y ( (R^I)[Y] \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  i

$R, x$  , ! 1 (Prem) i

$( (R^I)[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  , ! 2 ( $\forall E$ : P2) i

$(R^I)[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y]$  , ! 3 ( $(())E$ : 2) i

$(R^I)[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]$  , ! 4 ( $\Leftrightarrow E$ : 3) i

$( (R^I)[y] \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  , ! 5 ( $(())E$ : 4) i

$\forall R \forall Y ( (R^I)[Y] \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  ! 6 ( $\forall I$ : 1,5) i

□

! 4. **Fundamental Proposition of Images, Second Half.** i

$\vdash \forall R \forall Y ( \exists x R[x,y] \Rightarrow (R^I)[Y] )$  i

$R, x$  , ! 1 (Prem) i

$( (R^I)[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y] )$  , ! 2 ( $\forall E$ : P2) i

$(R^I)[y] \Leftrightarrow \exists x R[x,y]$  , ! 3 ( $(())E$ : 2) i

$\exists x R[x,y] \Rightarrow (R^I)[y]$  , ! 4 ( $\Leftrightarrow E$ : 3) i

$( \exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 5 ((E): 4)	i
$\forall R \forall y ( \exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	! 6 ( $\forall$ I: 1,5)	i
$\square$		

! 5. As with C5.5, it is often more convenient to appeal to P5 than to P4. i

$\vdash \forall R \forall x \forall y ( R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$		i
$x, y$	, ! 1 (Prem)	i
$R[x, y]$	, ! 2 (Prem)	i
$\exists x R[x, y]$	, ! 3 ( $\exists$ I: 2)	i
$( \exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 4 ( $\forall$ E: P4)	i
$\exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y]$	, ! 5 ((E): 4)	i
$(R^I)[y]$	, ! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y]$	, ! 7 ( $\Rightarrow$ I: 2,6)	i
$( R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 8 ((I): 7)	i
$\forall R \forall x \forall y ( R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	! 9 ( $\forall$ I: 1,8)	i
$\square$		

! 6. i

$\vdash \forall R \forall y ( \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg \exists x R[x, y] )$		i
$R, y$	, ! 1 (Prem)	i
$\neg (R^I)[y]$	, ! 2 (Prem)	i
$\exists x R[x, y]$	, ! 3 (Prem)	i
$( \exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 4 ( $\forall$ E: P4)	i
$\exists x R[x, y] \Rightarrow (R^I)[y]$	, ! 5 ((E): 4)	i
$(R^I)[y]$	, ! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$\mathfrak{F}$	, ! 7 ( $\mathfrak{F}$ I: 2,6)	i
$\exists x R[x, y] \Rightarrow \mathfrak{F}$	, ! 8 ( $\Rightarrow$ I: 3,7)	i
$\neg \exists x R[x, y]$	, ! 9 ( $\neg$ I: 8)	i
$\neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg \exists x R[x, y]$	, ! 10 ( $\Rightarrow$ I: 2,9)	i

$( \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg \exists x R[x,y] )$	, ! 11 ((I: 10)	i
$\forall R \forall y ( \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg \exists x R[x,y] )$	! 12 ( $\forall$ I: 1,11)	i
$\square$		
! 7.		
$\vdash \forall R \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ \neg (R^I)[a] \Rightarrow \neg y = a )$		i
$R, x, y$	, ! 1 (Prem)	i
$R[x,y] \ \& \ \neg (R^I)[a]$	, ! 2 (Prem)	i
$R[x,y]$	, ! 3 ( $\&$ E: 2)	i
$\neg (R^I)[a]$	, ! 4 ( $\&$ E: 2)	i
$y = a$	, ! 5 (Prem)	i
$\neg (R^I)[y]$	, ! 6 (=E: 4,5)	i
$( R[x,y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 7 ( $\forall$ E: P5)	i
$R[x,y] \Rightarrow (R^I)[y]$	, ! 8 ((E: 7)	i
$(R^I)[y]$	, ! 9 ( $\Rightarrow$ E: 3,8)	i
$\mathfrak{F}$	, ! 10 ( $\mathfrak{F}$ I: 4,9)	i
$y = a \Rightarrow \mathfrak{F}$	, ! 11 ( $\Rightarrow$ I: 5,10)	i
$\neg y = a$	, ! 12 ( $\neg$ I: 11)	i
$R[x,y] \ \& \ \neg (R^I)[a] \Rightarrow \neg y = a$	, ! 13 ( $\Rightarrow$ I: 2,12)	i
$( R[x,y] \ \& \ \neg (R^I)[a] \Rightarrow \neg y = a )$	, ! 14 ((I: 13)	i
$\forall R \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ \neg (R^I)[a] \Rightarrow \neg y = a )$	! 15 ( $\forall$ I: 1,14)	i
$\square$		
! 8.		
$\vdash \forall R \forall B \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y] )$		i
$R, B, x, y$	, ! 1 (Prem)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B$	, ! 2 (Prem)	i
$R[x,y]$	, ! 3 ( $\&$ E: 2)	i
$( R[x,y] \Rightarrow (R^I)[y] )$	, ! 4 ( $\forall$ E: P5)	i
$R[x,y] \Rightarrow (R^I)[y]$	, ! 5 ((E: 4)	i

$(R^I)[y]$	,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 3,5)	i
$(R^I) \subseteq B$	,! 7 ( $\&E$ : 2)	i
$(R^I)[y] \ \& \ (R^I) \subseteq B$	,! 8 ( $\&I$ : 6,7)	i
$( (R^I)[y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y] )$	,! 9 ( $\forall E$ : III1.2)	i
$(R^I)[y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y]$	,! 10 ( $( )E$ : 9)	i
$B[y]$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y]$	,! 12 ( $\Rightarrow I$ : 2,11)	i
$( R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y] )$	,! 13 ( $( )I$ : 12)	i
$\forall R \forall B \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y] )$	! 14 ( $\forall I$ : 1,13)	i

□

! 9. P9 is a corollary to P8. i

$\vdash \forall R \forall B \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y] )$		i
$R, B, x, y$	,! 1 (Prem)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B$	,! 2 (Prem)	i
$(R^I) \equiv B$	,! 3 ( $\&E$ : 2)	i
$( (R^I) \equiv B \Rightarrow (R^I) \subseteq B )$	,! 4 ( $\forall E$ : III1.11)	i
$(R^I) \equiv B \Rightarrow (R^I) \subseteq B$	,! 5 ( $( )E$ : 4)	i
$(R^I) \subseteq B$	,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 3,5)	i
$R[x,y]$	,! 7 ( $\&E$ : 2)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B$	,! 8 ( $\&I$ : 6,7)	i
$( R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y] )$	,! 9 ( $\forall E$ : P8)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \subseteq B \Rightarrow B[y]$	,! 10 ( $( )E$ : 9)	i
$B[y]$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y]$	,! 12 ( $\Rightarrow I$ : 2,11)	i
$( R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y] )$	,! 13 ( $( )I$ : 12)	i
$\forall R \forall B \forall x \forall y ( R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y] )$	! 14 ( $\forall I$ : 1,13)	i

□

! 10. i

$\vdash \forall R \forall B \forall y ( B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  i

$R, B, y$  ,! 1 (Prem) i

$B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I)$  ,! 2 (Prem) i

$( B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow (R^I)[y] )$  ,! 3 ( $\forall E$ : III1.2) i

$B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow (R^I)[y]$  ,! 4 ( $(\ )E$ : 3) i

$(R^I)[y]$  ,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) i

$( (R^I)[y] \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  ,! 6 ( $\forall E$ : P3) i

$(R^I)[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]$  ,! 7 ( $(\ )E$ : 6) i

$\exists x R[x,y]$  ,! 8 ( $\Rightarrow E$ : 5,7) i

$B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y]$  ,! 9 ( $\Rightarrow I$ : 2,8) i

$( B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  ,! 10 ( $(\ )I$ : 9) i

$\forall R \forall B \forall y ( B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  ! 11 ( $\forall I$ : 1,10) i

□

! 11. P11 is a corollary to P10. i

$\vdash \forall R \forall B \forall y ( B[y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  i

$R, B, y$  ,! 1 (Prem) i

$B[y] \ \& \ (R^I) \equiv B$  ,! 2 (Prem) i

$(R^I) \equiv B$  ,! 3 ( $\&E$ : 2) i

$( (R^I) \equiv B \Rightarrow B \subseteq (R^I) )$  ,! 4 ( $\forall E$ : III1.12) i

$(R^I) \equiv B \Rightarrow B \subseteq (R^I)$  ,! 5 ( $(\ )E$ : 4) i

$B \subseteq (R^I)$  ,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 3,5) i

$B[y]$  ,! 7 ( $\&E$ : 2) i

$B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I)$  ,! 8 ( $\&I$ : 6,7) i

$( B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y] )$  ,! 9 ( $\forall E$ : P10) i

$B[y] \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow \exists x R[x,y]$  ,! 10 ( $(\ )E$ : 9) i

$\exists x R[x,y]$  ,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10) i

$B[y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow \exists x \ R[x,y]$  ,! 12 ( $\Rightarrow I$ : 2,11) ;  
 $( B[y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow \exists x \ R[x,y] )$  ,! 13 ( $( )I$ : 12) ;  
 $\forall R \forall B \forall y ( B[y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow \exists x \ R[x,y] )$  ! 14 ( $\forall I$ : 1,13) ;  
 $\square$

! 12. ;

$\vdash \forall R \forall B ( \forall y (\exists x \ R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B )$  ;

$R, B$  ,! 1 (Prem) ;

$\forall y (\exists x \ R[x,y] \Rightarrow B[y])$  ,! 2 (Prem) ;

$x$  ,! 3 (Prem) ;

$(R^I)[x]$  ,! 4 (Prem) ;

$( (R^I)[x] \Rightarrow \exists x \ R[x,x] )$  ,! 5 ( $\forall E$ : P3) ;

$(R^I)[x] \Rightarrow \exists x \ R[x,x]$  ,! 6 ( $( )E$ : 5) ;

$\exists x \ R[x,x]$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) ;

$(\exists x \ R[x,x] \Rightarrow B[x])$  ,! 8 ( $\forall E$ : 2) ;

$\exists x \ R[x,x] \Rightarrow B[x]$  ,! 9 ( $( )E$ : 8) ;

$B[x]$  ,! 10 ( $\Rightarrow E$ : 7,9) ;

$(R^I)[x] \Rightarrow B[x]$  ,! 11 ( $\Rightarrow I$ : 4,10) ;

$( (R^I)[x] \Rightarrow B[x] )$  ,! 12 ( $( )I$ : 11) ;

$\forall x ( (R^I)[x] \Rightarrow B[x] )$  ,! 13 ( $\forall I$ : 3,12) ;

$(R^I) \subseteq B$  ,! 14 ( $\S I$ : II1.1,13) ;

$\forall y (\exists x \ R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B$  ,! 15 ( $\Rightarrow I$ : 2,14) ;

$( \forall y (\exists x \ R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B )$  ,! 16 ( $( )I$ : 15) ;

$\forall R \forall B ( \forall y (\exists x \ R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B )$  ;  
! ( $\forall I$ : 1,16) ;

$\square$

! 13. ;

$\vdash \forall R \forall B ( \forall y (B[y] \Rightarrow \exists x \ R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I) )$  ;

$R, B$	,! 1 (Prem)	i
$\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y])$	,! 2 (Prem)	i
$x$	,! 3 (Prem)	i
$B[x]$	,! 4 (Prem)	i
$(B[x] \Rightarrow \exists x R[x,x])$	,! 5 ( $\forall E$ : 2)	i
$B[x] \Rightarrow \exists x R[x,x]$	,! 6 ( $(\Rightarrow)E$ : 5)	i
$\exists x R[x,x]$	,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6)	i
$(\exists x R[x,x] \Rightarrow (R^I)[x])$	,! 8 ( $\forall E$ : P4)	i
$\exists x R[x,x] \Rightarrow (R^I)[x]$	,! 9 ( $(\Rightarrow)E$ : 8)	i
$(R^I)[x]$	,! 10 ( $\Rightarrow E$ : 7,9)	i
$B[x] \Rightarrow (R^I)[x]$	,! 11 ( $\Rightarrow I$ : 4,10)	i
$(B[x] \Rightarrow (R^I)[x])$	,! 12 ( $(\Rightarrow)I$ : 11)	i
$\forall x (B[x] \Rightarrow (R^I)[x])$	,! 13 ( $\forall I$ : 3,12)	i
$B \subseteq (R^I)$	,! 14 ( $\$I$ : III1.1,13)	i
$\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I)$	,! 15 ( $\Rightarrow I$ : 2,14)	i
$(\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I))$	,! 16 ( $(\Rightarrow)I$ : 15)	i
$\forall R \forall B (\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I))$	! 17 ( $\forall I$ : 1,16)	i

□

! 14.

⊢  $\forall R \forall B (\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv B)$

$R, B$	,! 1 (Prem)	i
$\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y])$	,! 2 (Prem)	i
$y$	,! 3 (Prem)	i
$(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y])$	,! 4 ( $\forall E$ : 2)	i
$\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]$	,! 5 ( $(\Rightarrow)E$ : 4)	i
$\exists x R[x,y] \Rightarrow B[y]$	,! 6 ( $\Leftrightarrow E$ : 5)	i
$(\exists x R[x,y] \Rightarrow B[y])$	,! 7 ( $(\Rightarrow)I$ : 6)	i

$\forall y(\exists x R[x,y] \Rightarrow B[y])$	,! 8 ( $\forall I$ : 3,7)	i
$(\forall y(\exists x R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B)$	,! 9 ( $\forall E$ : P12)	i
$\forall y(\exists x R[x,y] \Rightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \subseteq B$	,! 10 ( $(\Rightarrow)E$ : 9)	i
$(R^I) \subseteq B$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10)	i
$y$	,! 12 (Prem)	i
$(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y])$	,! 13 ( $\forall E$ : 2)	i
$\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]$	,! 14 ( $(\Rightarrow)E$ : 13)	i
$B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]$	,! 15 ( $(\Leftrightarrow)E$ : 14)	i
$(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y])$	,! 16 ( $(\Rightarrow)I$ : 15)	i
$\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y])$	,! 17 ( $\forall I$ : 12,16)	i
$(\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I))$	,! 18 ( $\forall E$ : P13)	i
$\forall y(B[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]) \Rightarrow B \subseteq (R^I)$	,! 19 ( $(\Rightarrow)E$ : 18)	i
$B \subseteq (R^I)$	,! 20 ( $\Rightarrow E$ : 17,19)	i
$(R^I) \subseteq B \ \& \ B \subseteq (R^I)$	,! 21 ( $(\&)I$ : 11,20)	i
$( (R^I) \subseteq B \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow (R^I) \equiv B )$	,! 22 ( $\forall E$ : II1.8)	i
$(R^I) \subseteq B \ \& \ B \subseteq (R^I) \Rightarrow (R^I) \equiv B$	,! 23 ( $(\Rightarrow)E$ : 22)	i
$(R^I) \equiv B$	,! 24 ( $\Rightarrow E$ : 21,23)	i
$\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv B$	,! 25 ( $\Rightarrow I$ : 2,24)	i
$(\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv B)$	,! 26 ( $(\Rightarrow)I$ : 25)	i
$\forall R \forall B (\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow B[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv B)$	! 27 ( $\forall I$ : 1,26)	i

□

! 15. P15 establishes the dual character between images and domains. Propositions about images may now be proven by appealing to their counterparts about domains.

$\vdash \forall R (R^I) \equiv ((R^*)^D)$

$R$  ,! 1 (Prem)

$(\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow ((R^*)^D)[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv ((R^*)^D))$

,! 2 ( $\forall E$ : P14)

$\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow ((R^*)^D)[y]) \Rightarrow (R^I) \equiv ((R^*)^D)$	,! 3 ((E): 2)	i
$y$	,! 4 (Prem)	i
$(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow \exists y (R^*)[y,y])$	,! 5 ( $\forall E$ : C3.5)	i
$\exists x R[x,y] \Leftrightarrow \exists y (R^*)[y,y]$	,! 6 ((E): 5)	i
$(((R^*)^D)[y] \Leftrightarrow \exists y (R^*)[y,y])$	,! 7 ( $\forall E$ : C5.2)	i
$((R^*)^D)[y] \Leftrightarrow \exists y (R^*)[y,y]$	,! 8 ((E): 7)	i
$\exists x R[x,y]$	,! 9 (Prem)	i
$\exists x R[x,y] \Rightarrow \exists y (R^*)[y,y]$	,! 10 ( $\Leftrightarrow E$ : 6)	i
$\exists y (R^*)[y,y]$	,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 9,10)	i
$\exists y (R^*)[y,y] \Rightarrow ((R^*)^D)[y]$	,! 12 ( $\Leftrightarrow E$ : 8)	i
$((R^*)^D)[y]$	,! 13 ( $\Rightarrow E$ : 11,12)	i
$\exists x R[x,y] \Rightarrow ((R^*)^D)[y]$	,! 14 ( $\Rightarrow I$ : 9,13)	i
$((R^*)^D)[y]$	,! 15 (Prem)	i
$((R^*)^D)[y] \Rightarrow \exists y (R^*)[y,y]$	,! 16 ( $\Leftrightarrow E$ : 8)	i
$\exists y (R^*)[y,y]$	,! 17 ( $\Rightarrow E$ : 15,16)	i
$\exists y (R^*)[y,y] \Rightarrow \exists x R[x,y]$	,! 18 ( $\Leftrightarrow E$ : 6)	i
$\exists x R[x,y]$	,! 19 ( $\Rightarrow E$ : 17,18)	i
$((R^*)^D)[y] \Rightarrow \exists x R[x,y]$	,! 20 ( $\Rightarrow I$ : 15,19)	i
$\exists x R[x,y] \Leftrightarrow ((R^*)^D)[y]$	,! 21 ( $\Leftrightarrow I$ : 14,20)	i
$(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow ((R^*)^D)[y])$	,! 22 ((I): 21)	i
$\forall y(\exists x R[x,y] \Leftrightarrow ((R^*)^D)[y])$	,! 23 ( $\forall I$ : 4,22)	i
$(R^I) \equiv ((R^*)^D)$	,! 24 ( $\Rightarrow E$ : 3,23)	i
$\forall R (R^I) \equiv ((R^*)^D)$	! 25 ( $\forall I$ : 1,24)	i

□

! 16. P16 becomes a corollary to P15, although evidently an alternative presentation could have reversed the order of the two propositions.

i

$\vdash \forall R (R^D) \equiv ((R^*)^I)$		i
<b>R</b>	,! 1 (Prem)	i
$((R^*)^I) \equiv (((R^*)^*)^D)$	,! 2 ( $\forall E$ : P15)	i
$((R^*)^*) \equiv R$	,! 3 ( $\forall E$ : C3.17)	i
$((R^*)^*) \equiv R \Rightarrow (((R^*)^*)^D) \equiv (R^D)$	,! 4 ( $\forall E$ : C5.15)	i
$((R^*)^*) \equiv R \Rightarrow (((R^*)^*)^D) \equiv (R^D)$	,! 5 ( $(\Rightarrow)E$ : 4)	i
$((R^*)^*)^D \equiv (R^D)$	,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 3,5)	i
$((R^*)^I) \equiv (((R^*)^*)^D) \ \& \ (((R^*)^*)^D) \equiv (R^D)$	,! 7 ( $\&I$ : 2,6)	i
$((R^*)^I) \equiv (((R^*)^*)^D) \ \& \ (((R^*)^*)^D) \equiv (R^D) \Rightarrow (R^D) \equiv ((R^*)^I)$	,! 8 ( $\forall E$ : III.16)	i
$(R^D) \equiv ((R^*)^I)$	,! 9 ( $(\Rightarrow)E$ : 8)	i
$(R^D) \equiv ((R^*)^I)$	,! 10 ( $\Rightarrow E$ : 7,9)	i
$\forall R (R^D) \equiv ((R^*)^I)$	! 11 ( $\forall I$ : 1,10)	i
$\square$		
! 17.		i
$\vdash \forall R \forall B ((R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B)$		i
<b>R, B</b>	,! 1 (Prem)	i
$(R^I) \equiv B$	,! 2 (Prem)	i
$(R^I) \equiv ((R^*)^D)$	,! 3 ( $\forall E$ : P15)	i
$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ (R^I) \equiv B$	,! 4 ( $\&I$ : 2,3)	i
$((R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ (R^I) \equiv B) \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B$	,! 5 ( $\forall E$ : III.19)	i
$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B$	,! 6 ( $(\Rightarrow)E$ : 5)	i
$((R^*)^D) \equiv B$	,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6)	i
$(R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B$	,! 8 ( $\Rightarrow I$ : 2,7)	i
$((R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B)$	,! 9 ( $(\Rightarrow)I$ : 8)	i

$\forall R \forall B ( (R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B )$  ! 10 ( $\forall I$ : 1,9) i

□

! 18. i

$\vdash \forall R \forall B ( ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B )$  i

$R, B$  ,! 1 (Prem) i

$((R^*)^D) \equiv B$  ,! 2 (Prem) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D)$  ,! 3 ( $\forall E$ : P15) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv B$  ,! 4 ( $\&I$ : 2,3) i

$( (R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B )$   
, ! 5 ( $\forall E$ : III.15) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B$   
, ! 6 ( $( )E$ : 5) i

$(R^I) \equiv B$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) i

$((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B$  ,! 8 ( $\Rightarrow I$ : 2,7) i

$( ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B )$  ,! 9 ( $( )I$ : 8) i

$\forall R \forall B ( ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B )$  ! 10 ( $\forall I$ : 1,9) i

□

! 19. i

$\vdash \forall R \forall B ( (R^I) \equiv B \Leftrightarrow ((R^*)^D) \equiv B )$  i

$R, B$  ,! 1 (Prem) i

$( (R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B )$  ,! 2 ( $\forall E$ : P17) i

$(R^I) \equiv B \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv B$  ,! 3 ( $( )E$ : 2) i

$( ((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B )$  ,! 4 ( $\forall E$ : P18) i

$((R^*)^D) \equiv B \Rightarrow (R^I) \equiv B$  ,! 5 ( $( )E$ : 4) i

$(R^I) \equiv B \Leftrightarrow ((R^*)^D) \equiv B$  ,! 6 ( $\Leftrightarrow I$ : 3,5) i

$( (R^I) \equiv B \Leftrightarrow ((R^*)^D) \equiv B )$  ,! 7 ( $( )I$ : 6) i

$\forall R \forall B ( (R^I) \equiv B \Leftrightarrow ((R^*)^D) \equiv B )$  ! 8 ( $\forall I$ : 1,7) i

□

! 20. The image operator maintains inclusion. Notice the use of

duality and the appeals (twice) to P15 in the proof. i

$\vdash \forall R \forall S ( R \subseteq S \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I) )$  i

$R, S$  ,! 1 (Prem) i

$R \subseteq S$  ,! 2 (Prem) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D)$  ,! 3 ( $\forall E$ : P15) i

$( R \subseteq S \Rightarrow (R^*) \subseteq (S^*) )$  ,! 4 ( $\forall E$ : C3.20) i

$R \subseteq S \Rightarrow (R^*) \subseteq (S^*)$  ,! 5 ( $(\Rightarrow)E$ : 4) i

$(R^*) \subseteq (S^*)$  ,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 2,5) i

$( (R^*) \subseteq (S^*) \Rightarrow ((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D) )$  ,! 7 ( $\forall E$ : C5.14) i

$(R^*) \subseteq (S^*) \Rightarrow ((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D)$  ,! 8 ( $(\Rightarrow)E$ : 7) i

$((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D)$  ,! 9 ( $\Rightarrow E$ : 6,8) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D)$  ,! 10 ( $\&I$ : 3,9) i

$( (R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D) \Rightarrow (R^I) \subseteq ((S^*)^D) )$   
,! 11 ( $\forall E$ : III.29) i

$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \subseteq ((S^*)^D) \Rightarrow (R^I) \subseteq ((S^*)^D)$   
,! 12 ( $(\Rightarrow)E$ : 11) i

$(R^I) \subseteq ((S^*)^D)$  ,! 13 ( $\Rightarrow E$ : 10,12) i

$(S^I) \equiv ((S^*)^D)$  ,! 14 ( $\forall E$ : P15) i

$(S^I) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (R^I) \subseteq ((S^*)^D)$  ,! 15 ( $\&I$ : 13,14) i

$( (S^I) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (R^I) \subseteq ((S^*)^D) \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I) )$   
,! 16 ( $\forall E$ : III.31) i

$(S^I) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (R^I) \subseteq ((S^*)^D) \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I)$   
,! 14 ( $(\Rightarrow)E$ : 13) i

$(R^I) \subseteq (S^I)$  ,! 15 ( $\Rightarrow E$ : 12,14) i

$R \subseteq S \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I)$  ,! 16 ( $\Rightarrow I$ : 2,15) i

$( R \subseteq S \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I) )$  ,! 17 ( $(\Rightarrow)I$ : 16) i

$\forall R \forall S ( R \subseteq S \Rightarrow (R^I) \subseteq (S^I) )$  ! 18 ( $\forall I$ : 1,17) i

□

! 21. i

$\vdash \forall R \forall S \forall y ( S \subseteq R \ \& \ \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg (S^I)[y] )$		i
$R, S, y$	,! 1 (Prem)	i
$S \subseteq R \ \& \ \neg (R^I)[y]$	,! 2 (Prem)	i
$S \subseteq R$	,! 3 (&E: 2)	i
$\neg (R^I)[y]$	,! 4 (&E: 2)	i
$( S \subseteq R \Rightarrow (S^I) \subseteq (R^I) )$	,! 5 ( $\forall$ E: P20)	i
$S \subseteq R \Rightarrow (S^I) \subseteq (R^I)$	,! 6 (( $\Rightarrow$ )E: 5)	i
$(S^I) \subseteq (R^I)$	,! 7 ( $\Rightarrow$ E: 3,6)	i
$\neg (R^I)[y] \ \& \ (S^I) \subseteq (R^I)$	,! 8 (&I: 4,7)	i
$( \neg (R^I)[y] \ \& \ (S^I) \subseteq (R^I) \Rightarrow \neg (S^I)[y] )$	,! 9 ( $\forall$ E: III.3)	i
$\neg (R^I)[y] \ \& \ (S^I) \subseteq (R^I) \Rightarrow \neg (S^I)[y]$	,! 10 (( $\Rightarrow$ )E: 9)	i
$\neg (S^I)[y]$	,! 11 ( $\Rightarrow$ E: 8,10)	i
$S \subseteq R \ \& \ \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg (S^I)[y]$	,! 12 ( $\Rightarrow$ I: 2,12)	i
$( S \subseteq R \ \& \ \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg (S^I)[y] )$	,! 13 (( $\Rightarrow$ )I: 12)	i
$\forall R \forall S \forall y ( S \subseteq R \ \& \ \neg (R^I)[y] \Rightarrow \neg (S^I)[y] )$	! 14 ( $\forall$ I: 1,13)	i

□

! 22. The image operator maintains equivalence. Remark again the appeals to P15 and so the use of duality. i

$\vdash \forall R \forall S ( R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I) )$		i
$R, S$	,! 1 (Prem)	i
$R \equiv S$	,! 2 (Prem)	i
$(R^I) \equiv ((R^*)^D)$	,! 3 ( $\forall$ E: P15)	i
$( R \equiv S \Rightarrow (R^*) \equiv (S^*) )$	,! 4 ( $\forall$ E: C3.20)	i
$R \equiv S \Rightarrow (R^*) \equiv (S^*)$	,! 5 (( $\Rightarrow$ )E: 4)	i
$(R^*) \equiv (S^*)$	,! 6 ( $\Rightarrow$ E: 2,5)	i
$( (R^*) \equiv (S^*) \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D) )$	,! 7 ( $\forall$ E: C5.15)	i

$(R^*) \equiv (S^*) \Rightarrow ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D)$  ,! 8 ((E: 7) i  
 $((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D)$  ,! 9 ( $\Rightarrow$ E: 6,8) i  
 $(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D)$  ,! 10 (&I: 3,9) i  
 $(S^I) \equiv ((S^*)^D)$  ,! 11 ( $\forall$ E: P15) i  
 $(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (S^I) \equiv ((S^*)^D)$   
,! 12 (&I: 10,11) i  
 $( (R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (S^I) \equiv ((S^*)^D) )$   
 $\Rightarrow (R^I) \equiv (S^I)$  )  
,! 13 ( $\forall$ E: III.22) i  
 $(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ ((R^*)^D) \equiv ((S^*)^D) \ \& \ (S^I) \equiv ((S^*)^D)$   
 $\Rightarrow (R^I) \equiv (S^I)$   
,! 14 ((E: 13) i  
 $(R^I) \equiv (S^I)$  ,! 15 ( $\Rightarrow$ E: 12,14) i  
 $R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I)$  ,! 16 ( $\Rightarrow$ I: 2,15) i  
 $( R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I) )$  ,! 17 ((I: 16) i  
 $\forall R \forall S ( R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I) )$  ! 18 ( $\forall$ I: 1,17) i

□

! 23. i

$\vdash \forall R \forall S \forall B ( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B )$

**R, S, B** ,! 1 (Prem) i  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S$  ,! 2 (Prem) i  
 $(R^I) \equiv B$  ,! 3 (&E: 2) i  
 $R \equiv S$  ,! 4 (&E: 2) i  
 $( R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I) )$  ,! 5 ( $\forall$ E: P22) i  
 $R \equiv S \Rightarrow (R^I) \equiv (S^I)$  ,! 6 ((E: 5) i  
 $(R^I) \equiv (S^I)$  ,! 7 ( $\Rightarrow$ E: 4,6) i  
 $(R^I) \equiv (S^I) \ \& \ (R^I) \equiv B$  ,! 8 (&I: 3,7) i  
 $( (R^I) \equiv (S^I) \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow (S^I) \equiv B )$   
,! 9 ( $\forall$ E: III.19) i  
 $(R^I) \equiv (S^I) \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow (S^I) \equiv B$  ,! 10 ((E: 9) i

$(S^I) \equiv B$  ,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10) ;  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B$  ,! 12 ( $\Rightarrow I$ : 2,11) ;  
 $( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B )$  ,! 13 ( $(\ )I$ : 12) ;  
 $\forall R \forall S \forall B ( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B )$  ! 14 ( $\forall I$ : 1,13) ;

□

! 24.

$\vdash \forall R \forall S \forall B \forall A ( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A )$  ;  
 $R, S, B, A$  ,! 1 (Prem) ;  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \ \& \ B \equiv A$  ,! 2 (Prem) ;  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S$  ,! 3 ( $\&E$ : 2) ;  
 $B \equiv A$  ,! 4 ( $\&E$ ) ;  
 $( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B )$  ,! 5 ( $\forall E$ : P23) ;  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \Rightarrow (S^I) \equiv B$  ,! 6 ( $(\ )E$ : 5) ;  
 $(S^I) \equiv B$  ,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 3,6) ;  
 $(S^I) \equiv B \ \& \ B \equiv A$  ,! 8 ( $\&I$ : 4,7) ;  
 $( (S^I) \equiv B \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A )$  ,! 9 ( $\forall E$ : II1.15) ;  
 $(S^I) \equiv B \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A$  ,! 10 ( $(\ )E$ : 9) ;  
 $(S^I) \equiv A$  ,! 11 ( $\Rightarrow E$ : 8,10) ;  
 $(R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A$  ,! 12 ( $\Rightarrow I$ : 2,11) ;  
 $( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A )$  ,! 13 ( $(\ )I$ : 12) ;  
 $\forall R \forall S \forall B \forall A ( (R^I) \equiv B \ \& \ R \equiv S \ \& \ B \equiv A \Rightarrow (S^I) \equiv A )$  ;  
! 14 ( $\forall I$ : 1,13) ;

□

! 25.

$\vdash \forall R \forall S ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$  ;  
 $R, S$  ,! 1 (Prem) ;  
 $((R \sqcup S)^I) \equiv ( ((R \sqcup S)^*)^D )$  ,! 2 ( $\forall E$ : P15) ;

$$((R \sqcup S)^*) \equiv ((R^*) \sqcup (S^*)) \quad ,! 3 (\forall E: C3.27) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^*) \equiv ((R^*) \sqcup (S^*)) \\ \Rightarrow & ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \end{aligned} \quad ,! 4 (\forall E: C5.15) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^*) \equiv ((R^*) \sqcup (S^*)) \\ \Rightarrow & ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \end{aligned} \quad ,! 5 ({}E: 4) \quad ;$$

$$((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \quad ,! 6 (\Rightarrow E: 3,5) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R \sqcup S)^*)^D \\ \& ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \end{aligned} \quad ,! 7 (\&I: 2,6) \quad ;$$

$$((R^*) \sqcup (S^*))^D \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \quad ,! 8 (\forall E: C5.19) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R \sqcup S)^*)^D \\ \& ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \\ \& ((R^*) \sqcup (S^*))^D \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \end{aligned} \quad ,! 9 (\&I: 7,8) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R \sqcup S)^*)^D \\ \& ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \\ \& ((R^*) \sqcup (S^*))^D \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \\ \Rightarrow & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \end{aligned} \quad ,! 10 (\forall E: III.21) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R \sqcup S)^*)^D \\ \& ((R \sqcup S)^*)^D \equiv ((R^*) \sqcup (S^*))^D \\ \& ((R^*) \sqcup (S^*))^D \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \\ \Rightarrow & ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \end{aligned} \quad ,! 11 ({}E: 10) \quad ;$$

$$((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \quad ,! 12 (\Rightarrow E: 9,11) \quad ;$$

$$(R^I) \equiv (R^*)^D \quad ,! 13 (\forall E: P15) \quad ;$$

$$(S^I) \equiv (S^*)^D \quad ,! 14 (\forall E: P15) \quad ;$$

$$(R^I) \equiv (R^*)^D \ \& \ (S^I) \equiv (S^*)^D \quad ,! 15 (\&I: 13,14) \quad ;$$

$$\begin{aligned} & (R^I) \equiv (R^*)^D \ \& \ (S^I) \equiv (S^*)^D \\ \& ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^*)^D \cup (S^*)^D) \end{aligned} \quad ,! 16 (\&I: 12,15) \quad ;$$

$$(R^I) \equiv (R^*)^D \ \& \ (S^I) \equiv (S^*)^D$$

$$\& ((R \sqcup S)^I) \equiv ( ((R^*)^D) \cup ((S^*)^D) )$$

$$\Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

,! 17 ( $\forall E$ : II2.42) ;

$$(R^I) \equiv ((R^*)^D) \ \& \ (S^I) \equiv ((S^*)^D)$$

$$\& ((R \sqcup S)^I) \equiv ( ((R^*)^D) \cup ((S^*)^D) )$$

$$\Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

,! 18 ( $()E$ : 17) ;

$$((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

,! 19 ( $\Rightarrow E$ : 16,18) ;

$$\forall R \forall S ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

! 20 ( $\forall I$ : 1,19) ;

□

! 26.

$$\vdash \forall R \forall S \forall A \forall B ( (R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B) )$$

**R, S, A, B**

,! 1 (Prem) ;

$$(R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B$$

,! 2 (Prem) ;

$$((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

,! 3 ( $\forall E$ : P23) ;

$$(R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \ \& \ ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

,! 4 ( $\&I$ : 2,3) ;

$$( (R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \ \& \ ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

$$\Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B) )$$

,! 5 ( $\forall E$ : II2.40) ;

$$(R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \ \& \ ((R \sqcup S)^I) \equiv ((R^I) \cup (S^I))$$

$$\Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B)$$

,! 6 ( $()E$ : 5) ;

$$((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B)$$

,! 7 ( $\Rightarrow E$ : 4,6) ;

$$(R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B)$$

,! 8 ( $\Rightarrow I$ : 2,7) ;

$$( (R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B) )$$

,! 9 ( $()I$ : 8) ;

$$\forall R \forall S \forall A \forall B ( (R^I) \equiv A \ \& \ (S^I) \equiv B \Rightarrow ((R \sqcup S)^I) \equiv (A \cup B) )$$

! 10 ( $\forall I$ : 1,9) ;

□

! 27.

$$\vdash \forall R \forall A \forall B ( (R^D) \equiv A \ \& \ (R^I) \equiv B \ \& \ \exists x A[x] \Rightarrow \exists y B[y] )$$

**R, A, B**

,! 1 (Prem) ;

$(R^D) \equiv A \ \& \ (R^I) \equiv B \ \& \ \exists x \ A[x]$	,! 2 (Prem)	i
$(R^D) \equiv A$	,! 3 (&E: 2)	i
$(R^I) \equiv B$	,! 4 (&E: 2)	i
$\exists x \ A[x]$	,! 5 (&E: 2)	i
$A[x]$	,! 6 ( $\exists$ E: 5)	i
$A[x] \ \& \ (R^D) \equiv A$	,! 7 (&I: 3,6)	i
$(A[x] \ \& \ (R^D) \equiv A \Rightarrow \exists y \ R[x,y])$	,! 8 ( $\forall$ E: C5.9)	i
$A[x] \ \& \ (R^D) \equiv A \Rightarrow \exists y \ R[x,y]$	,! 9 ( $(\ )$ E: 8)	i
$\exists y \ R[x,y]$	,! 10 ( $\Rightarrow$ E: 7,9)	i
$R[x,y]$	,! 11 ( $\exists$ E: 10)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B$	,! 12 (&I: 4,11)	i
$(R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y])$	,! 13 ( $\forall$ E: P9)	i
$R[x,y] \ \& \ (R^I) \equiv B \Rightarrow B[y]$	,! 14 ( $(\ )$ E: 13)	i
$B[y]$	,! 15 ( $\Rightarrow$ E: 12,14)	i
$\exists y \ B[y]$	,! 16 ( $\exists$ I: 15)	i
$(R^D) \equiv A \ \& \ (R^I) \equiv B \ \& \ \exists x \ A[x] \Rightarrow \exists y \ B[y]$	,! 17 ( $\Rightarrow$ I: 2,16)	i
$( (R^D) \equiv A \ \& \ (R^I) \equiv B \ \& \ \exists x \ A[x] \Rightarrow \exists y \ B[y] )$	,! 18 ( $(\ )$ I: 17)	i
$\forall R \forall A \forall B ( (R^D) \equiv A \ \& \ (R^I) \equiv B \ \& \ \exists x \ A[x] \Rightarrow \exists y \ B[y] )$	! 19 ( $\forall$ I: 1,18)	i

□

! 28.

$\vdash (\Phi^I) \equiv \phi$		i
$(\Phi^I) \equiv ((\Phi^*)^D)$	,! 1 ( $\forall$ E: P15)	i
$(\Phi \equiv (\Phi^*) \Rightarrow (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D))$	,! 2 ( $\forall$ E: C5.15)	i
$\Phi \equiv (\Phi^*) \Rightarrow (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D)$	,! 3 ( $(\ )$ E: 2)	i
$(\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D)$	,! 4 ( $\Rightarrow$ E: C4.14,3)	i

$(\Phi^I) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D)$  ,! 5 (&I: 1,4) ;  
 $(\Phi^I) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv \phi$  ,! 6 (&I: C5.22,5) ;  
 $( (\Phi^I) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv \phi \Rightarrow (\Phi^I) \equiv \phi )$  ,! 7 ( $\forall$ E: II1.23) ;  
 $(\Phi^I) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv ((\Phi^*)^D) \ \& \ (\Phi^D) \equiv \phi \Rightarrow (\Phi^I) \equiv \phi$  ,! 8 (()E) ;  
 $(\Phi^I) \equiv \phi$  ! 9 ( $\Rightarrow$ E) ;

□

! 29. An alternative proof (with the same number of steps) would be to apply P23 after establishing that  $\Phi \equiv \mathbf{R}$ .

i

$\vdash \forall \mathbf{R} ( \mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi )$  ;  
 $\mathbf{R}$  ,! 1 (Prem) ;  
 $\mathbf{R} \equiv \Phi$  ,! 2 (Prem) ;  
 $( \mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I) )$  ,! 3 ( $\forall$ E: P22) ;  
 $\mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I)$  ,! 4 (()E: 3) ;  
 $(\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I)$  ,! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4) ;  
 $(\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I) \ \& \ (\Phi^I) \equiv \phi$  ,! 6 (&I: P28,5) ;  
 $( (\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I) \ \& \ (\Phi^I) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi )$  ,! 7 ( $\forall$ E: II1.15) ;  
 $(\mathbf{R}^I) \equiv (\Phi^I) \ \& \ (\Phi^I) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi$  ,! 8 (()E: 7) ;  
 $(\mathbf{R}^I) \equiv \phi$  ,! 9 ( $\Rightarrow$ E: 6,8) ;  
 $\mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi$  ,! 10 ( $\Rightarrow$ I: 2,9) ;  
 $( \mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi )$  ,! 11 (()I: 10) ;  
 $\forall \mathbf{R} ( \mathbf{R} \equiv \Phi \Rightarrow (\mathbf{R}^I) \equiv \phi )$  ! 12 ( $\forall$ I: 1,11) ;

□

! 30.

$\vdash \forall \mathbf{R} ( (\mathbf{R}^I) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi )$  ;  
 $\mathbf{R}$  ,! 1 (Prem) ;

$(\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi$	,! 2 (Prem)	i
$( (\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^{\mathcal{D}}) \equiv \phi )$	,! 3 ( $\forall\text{E}$ : P17)	i
$(\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi \Rightarrow ((\mathbf{R}^*)^{\mathcal{D}}) \equiv \phi$	,! 4 ( $(\ )\text{E}$ : 3)	i
$((\mathbf{R}^*)^{\mathcal{D}}) \equiv \phi$	,! 5 ( $\Rightarrow\text{E}$ : 2,4)	i
$( ((\mathbf{R}^*)^{\mathcal{D}}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv \Phi )$	,! 6 ( $\forall\text{E}$ : C5.24)	i
$((\mathbf{R}^*)^{\mathcal{D}}) \equiv \phi \Rightarrow (\mathbf{R}^*) \equiv \Phi$	,! 7 ( $(\ )\text{E}$ : 6)	i
$(\mathbf{R}^*) \equiv \Phi$	,! 8 ( $\Rightarrow\text{E}$ : 5,7)	i
$( (\mathbf{R}^*) \equiv \Phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi )$	,! 9 ( $\forall\text{E}$ : C4.15)	i
$(\mathbf{R}^*) \equiv \Phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi$	,! 10 ( $(\ )\text{E}$ : 9)	i
$\mathbf{R} \equiv \Phi$	,! 11 ( $\Rightarrow\text{E}$ : 8,10)	i
$(\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi$	,! 12 ( $\Rightarrow\text{I}$ : 2,11)	i
$( (\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi )$	,! 13 ( $(\ )\text{I}$ : 12)	i
$\forall\mathbf{R} ( (\mathbf{R}^{\perp}) \equiv \phi \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \Phi )$	! 14 ( $\forall\text{I}$ : 1,13)	i

□