!**CHAPTER 8**

FUNCTIONAL PREDICATES¡

! The purpose of this chapter is to introduce the notion of functional relationships, and the value of a functional relationship given an argument. The first 𝕋-definition--for (**R**´**x**)--of this work makes its appearance.

f R is used to say that **R** is a functional relationship,

R 𝔽 **A** means that **R** is a functional relationship with domain **A**, and

(**R**´**x**) refers to the (unique) thing to which **x** bears **R**, which pre-supposes that **R** is functional and **x** belongs to the domain of **R**. ¡

! **1. f R** says that **R** is a functional relationship. ¡

𝕊 **f** ; **f R** ; ∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[x,z] ⇒ y = z) ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀R∀x∀y∀z (**f** R & R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z) ¡

R,**x**,**y**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

f R & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

R[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ,! 4 (&E: 2) ¡

∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[x,z] ⇒ y = z) ,! 5 (𝕊E: P1,3) ¡

(**R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**) ,! 6 (∀E: 5) ¡

R[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 7 (()E: 6) ¡

y = **z** ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

f R & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**f R** & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀x∀y∀z (**f** R & R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z)
! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **3.** Sub-relations of functional relationships are functional. ¡

⊢ ∀R∀S (**f** R & S ⫅ R ⇒ **f** S) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

f R & **S** ⫅ **R** ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

S ⊆ R ,! 4 (&E: 2) ¡

x,y,z ,! 5 (Prem) ¡

S[x,y] & S[x,z] ,! 6 (Prem) ¡

S[x,y] ,! 7 (&E: 6) ¡

S[x,y] & S ⊆ R ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(S[x,y] & S ⊆ R ⇒ R[x,y]) ,! 9 (∀E: C1.2) ¡

S[x,y] & S ⊆ R ⇒ R[x,y] ,! 10 (()E: 9) ¡

R[x,y] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

S[x,z] ,! 12 (&E: 6) ¡

S[x,z] & S ⊆ R ,! 13 (&I: 4,12) ¡

(S[x,z] & S ⊆ R ⇒ R[x,z]) ,! 14 (∀E: C1.2) ¡

S[x,z] & S ⊆ R ⇒ R[x,z] ,! 15 (()E: 14) ¡

R[x,z] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

R[x,y] & R[x,z] ,! 17 (&I: 11,16) ¡

∀x∀y∀z (R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z)
,! 18 (𝕊E: P1,3) ¡

(R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z) ,! 19 (∀E: 18) ¡

R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z ,! 20 (()E: 19) ¡

y = z ,! 21 (⇒E: 17,20) ¡

S[x,y] & S[x,z] ⇒ y = z ,! 22 (⇒I: 6,21) ¡

(S[x,y] & S[x,z] ⇒ y = z) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀x∀y∀z (S[x,y] & S[x,z] ⇒ y = z) ,! 24 (∀I: 5,23) ¡

f S ,! 25 (𝕊I: C1.1,24) ¡

f R & S ⊆ R ⇒ f S ,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(f R & S ⊆ R ⇒ f S) ,! 27 (()I: 26) ¡

∀R∀S (f R & S ⊆ R ⇒ f S) ! 28 (∀I: 1,27) ¡

□

! **4.** Restrictions of functional relationships are functional. ¡

⊢ ∀R∀A (**f** R ⇒ **f** (R ⌈ A))		¡
R,A	,! 1 (Prem)	¡
f R	,! 2 (Prem)	¡
(**R** ⌈ **A**) ⫅ **R**	,! 3 (∀E: C7.7)	¡
f R & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R**	,! 4 (&I: 2,3)	¡
(**f R** & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R** ⇒ **f** (**R** ⌈ **A**))	,! 5 (∀E: P3)	¡
f R & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R** ⇒ **f** (**R** ⌈ **A**)	,! 6 (()E: 5)	¡
f (**R** ⌈ **A**)	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
f R ⇒ **f** (**R** ⌈ **A**)	,! 8 (⇒I: 2,7)	¡
(**f R** ⇒ **f** (**R** ⌈ **A**))	,! 9 (()I: 8)	¡
∀R∀A (**f** R ⇒ **f** (R ⌈ A))	! 10 (∀I: 1,9)	¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ∀R∀S (**f** R & R ≣ S ⇒ **f** S)		¡
R,S	,! 1 (Prem)	¡
f R & **R** ≣ **S**	,! 2 (Prem)	¡
f R	,! 3 (&E: 2)	¡
R ≣ **S**	,! 4 (&E: 2)	¡
(**R** ≣ **S** ⇒ **S** ⫅ **R**)	,! 5 (∀E: C1.10)	¡
R ≣ **S** ⇒ **S** ⫅ **R**	,! 6 (()E: 5)	¡
S ⫅ **R**	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
f R & **S** ⫅ **R**	,! 8 (&I: 3,7)	¡
(**f R** & **S** ⫅ **R** ⇒ **f S**)	,! 9 (∀E: P3)	¡
f R & **S** ⫅ **R** ⇒ **f S**	,! 10 (()E: 9)	¡
f S	,! 11 (⇒E: 8,10)	¡
f R & **R** ≣ **S** ⇒ **f S**	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡
(**f R** & **R** ≣ **S** ⇒ **f S**)	,! 13 (()I: 12)	¡
∀R∀S (**f** R & R ≣ S ⇒ **f** S)	! 14 (∀I: 1,13)	¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀R∀S (**f** R & S ≣ R ⇒ **f** S) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

f R & **S** ≣ **R** ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

S ≣ **R** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**S** ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S**) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

S ≣ **R** ⇒ **R** ≣ **S** ,! 6 (()E: 5) ¡

R ≣ **S** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f R & **R** ≣ **S** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**f R** & **R** ≣ **S** ⇒ **f S**) ,! 9 (∀E: P5) ¡

f R & **R** ≣ **S** ⇒ **f S** ,! 10 (()E: 9) ¡

f S ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

f R & **S** ≣ **R** ⇒ **f S** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**f R** & **S** ≣ **R** ⇒ **f S**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S (**f** R & S ≣ R ⇒ **f** S) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **7.** The union of functional relationships with disjoint domains is functional. ¡

⊦ ∀R∀S (**f** R & **f** S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ ϕ ⇒ **f** (R ⊔ S)) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

f R & **f S** & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

f S ,! 4 (&E: 2) ¡

(($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ ϕ ,! 5 (&E: 2) ¡

∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[x,z] ⇒ y = z) ,! 6 (E: P1,3) ¡

∀x∀y∀z (**S**[x,y] & **S**[x,z] ⇒ y = z) ,! 7 (E: P1,4) ¡

$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$,! 8 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 9 (Prem) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 10 (&E: 9) ¡

$(\ (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ )$
,! 11 (∀E: C2.3) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 12 (()E: 11) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 14 (&E: 9) ¡

$(\ (\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}]\ )$
,! 15 (∀E: C2.3) ¡

$(\mathbf{R} \sqcup \mathbf{S})[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 16 (()E: 15) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \vee \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

$(\ (\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]\ \&\ ((\mathbf{R}^{D}) \cap (\mathbf{S}^{D})) \equiv \phi \Rightarrow \neg\ (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]\ )$
,! 18 (∀E: II5.23) ¡

$(\mathbf{R}^{D})[\mathbf{x}]\ \&\ ((\mathbf{R}^{D}) \cap (\mathbf{S}^{D})) \equiv \phi \Rightarrow \neg\ (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$
,! 19 (()E: 18) ¡

! Case 1 : $\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,! 20 (Prem) ¡

! Case 1a : $\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 21 (Prem) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 22 (&I: 20,21) ¡

$(\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}\ )$,! 23 (∀E: 6) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\ \&\ \mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,! 24 (()E: 23) ¡

$\mathbf{y} = \mathbf{z}$,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

$\mathbf{R}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,! 26 (⇒I: 21,25) ¡

! Case 1b : $\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}]$,! 27 (Prem) ¡

$(\ \mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]\ )$,! 28 (∀E: C5.5) ¡

$\mathbf{S}[\mathbf{x},\mathbf{z}] \Rightarrow (\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 29 (()E: 28) ¡

$(\mathbf{S}^{D})[\mathbf{x}]$,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**]) ,! 31 (∀E: C5.5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 32 (()E: 31) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 33 (⇒E: 20,32) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ φ ,! 34 (&I: 5,33) ¡

¬ ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 35 (⇒E: 34,19) ¡

! Contradiction: ($\mathbf{S}^D$)[**x**] and ¬ ($\mathbf{S}^D$)[**x**], so anything follows, including **y** = **z**. ¡

¬ **y** = **z** ,! 36 (Prem) ¡

$\mathfrak{F}$,! 37 ($\mathfrak{F}$I: 30,35) ¡

¬ **y** = **z** ⇒ $\mathfrak{F}$,! 38 (⇒I: 36,37) ¡

¬¬ **y** = **z** ,! 39 (¬I: 38) ¡

y = **z** ,! 40 (¬E: 39) ¡

S[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 41 (⇒I: 27,40) ¡

y = **z** ,! 42 (∨E: 17,26,41) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ **y** = **z** ,! 43 (⇒I: 20,42) ¡

! Case 2 : **S**[**x**,**y**] ¡

S[**x**,**y**] ,! 44 (Prem) ¡

! Case 2a : **R**[**x**,**z**] ¡

R[**x**,**z**] ,! 45 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**z**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**]) ,! 46 (∀E: C5.5) ¡

R[**x**,**z**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 47 (()E: 46) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 48 (⇒E: 45,47) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ φ ,! 49 (&I: 5,48) ¡

¬ ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 50 (⇒E: 19,49) ¡

(**S**[**x**,**y**] ⇒ ($\mathbf{S}^D$)[**x**]) ,! 51 (∀E: C5.5) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 52 (()E: 51) ¡

($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 53 (⇒E: 44,52) ¡

! Contradiction: ($\mathbf{S}^D$)[**x**] and ¬($\mathbf{S}^D$)[**x**], so anything follows, including **y** = **z**. ¡

¬ y = z ,! 54 (Prem) ¡

ℱ ,! 55 (ℱI: 50,53) ¡

¬ y = z ⇒ ℱ ,! 56 (⇒I: 54,55) ¡

¬¬ y = z ,! 57 (¬I: 56) ¡

y = z ,! 58 (¬E: 57) ¡

R[x,z] ⇒ y = z ,! 59 (⇒I: 45,58) ¡

! Case 2b : S[x,z] ¡

S[x,z] ,! 60 (Prem) ¡

S[x,y] & S[x,z] ,! 61 (&I: 44,60) ¡

(S[x,y] & S[x,z] ⇒ y = z) ,! 62 (∀E: 7) ¡

S[x,y] & S[x,z] ⇒ y = z ,! 63 (()E: 62) ¡

y = z ,! 64 (⇒E: 61,63) ¡

S[x,z] ⇒ y = z ,! 65 (⇒I: 60,64) ¡

y = z ,! 66 (∨E: 17,59,65) ¡

S[x,y] ⇒ y = z ,! 67 (⇒I: 44,66) ¡

! Conclusion ¡

y = z ,! 68 (∨E: 13,43,67) ¡

(R ⊔ S)[x,y] & (R ⊔ S)[x,z] ⇒ y = z ,! 69 (⇒I: 9,68) ¡

((R ⊔ S)[x,y] & (R ⊔ S)[x,z] ⇒ y = z) ,! 70 (()I: 69) ¡

∀x∀y∀z ((R ⊔ S)[x,y] & (R ⊔ S)[x,z] ⇒ y = z) ,! 71 (∀I: 8,70) ¡

f (R ⊔ S) ,! 72 (𝕊I: P1,71) ¡

f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ φ ⇒ f (R ⊔ S) ,! 73 (⇒I: 2,72) ¡

(f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ φ ⇒ f (R ⊔ S)) ,! 74 (()I: 73) ¡

∀R∀S (f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ φ ⇒ f (R ⊔ S)) ! 75 (∀I: 1,74) ¡

▯

! **8.** ¡

⊦ ∀R∀S∀A∀B (**f** R & **f** S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ **f** (R ⊔ S)) ¡

R,**S**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & **f** **S** & (**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 2 (Prem) ¡

f **R** & **f** **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 4 (&E: 2) ¡

((**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ ((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ)
,! 5 (∀E: II3.39) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ ((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ
,! 6 (()E: 5) ¡

((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f **R** & **f** **S** & ((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**f** **R** & **f** **S** & ((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**))
,! 9 (∀E: P7) ¡

f **R** & **f** **S** & ((**R**^{D}) ∩ (**S**^{D})) ≡ ϕ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**)
,! 10 (()E: 9) ¡

f (**R** ⊔ **S**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

f **R** & **f** **S** & (**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**f** **R** & **f** **S** & (**R**^{D}) ≡ **A** & (**S**^{D}) ≡ **B** & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀A∀B (**f** R & **f** S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ **f** (R ⊔ S))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **9.** Our empty relationship is functional. ¡

⊦ **f** Φ ¡

x,**y**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

Φ[**x**,**y**] & Φ[**x**,**z**] ,! 2 (Prem) ¡

Φ[**x**,**y**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **y** = **z** ,! 4 (Prem) ¡

¬ Φ[**x**,**y**] ,! 5 (∀E: C4.3) ¡

ℱ ,! 6 (ℱI: 3,5) ¡

¬ **y** = **z** ⇒ ℱ ,! 7 (⇒I: 4,6) ¡

¬¬ **y** = **z** ,! 8 (¬I: 7) ¡

y = **z** ,! 9 (¬E: 8) ¡

Φ[**x**,**y**] & Φ[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(Φ[**x**,**y**] & Φ[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀x∀y∀z (Φ[x,y] & Φ[x,z] ⇒ y = z) ,! 12 (∀I: 1,11) ¡

f Φ ! 13 (𝕊I: P1,12) ¡

▯

! **10.** **R** 𝔽 **A** means that **R** is a functional relationship with domain **A**. ¡

𝕊 𝔽 ; **R** 𝔽 **A** ; (**R**^{D}) ≡ **A** & **f** **R** ¡

! **11.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & R ≣ S & A ≡ B ⇒ S 𝔽 B) ¡

R,**S**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ,! 2 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** ,! 3 (&E: 2) ¡

R ≣ **S** & **A** ≡ **B** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **f** **R** ,! 5 (𝕊E: P10,3) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** ,! 6 (&E: 5) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ,! 7 (&I: 4,6) ¡

((**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B**)
,! 8 (∀E: C5.17) ¡

(**R**^{D}) ≡ **A** & **R** ≣ **S** & **A** ≡ **B** ⇒ (**S**^{D}) ≡ **B** ,! 9 (()E: 8) ¡

(**S**^{D}) ≡ **B** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

f **R** ,! 11 (&E: 5) ¡

R ≣ S ,! 12 (&E: 2) ¡

f R & **R ≣ S** ,! 13 (&I: 11,12) ¡

(**f R** & **R ≣ S** ⇒ **f S**) ,! 14 (∀E: P5) ¡

f R & **R ≣ S** ⇒ **f S** ,! 15 (()E: 14) ¡

f S ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

($\mathbf{S}^{D}$) ≡ **B** & **f S** ,! 17 (&I: 10,16) ¡

S 𝔽 **B** ,! 18 (𝕊I: P10,17) ¡

R 𝔽 **A** & **R ≣ S** & **A** ≡ **B** ⇒ **S** 𝔽 **B** ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **R ≣ S** & **A** ≡ **B** ⇒ **S** 𝔽 **B**) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & R ≣ S & A ≡ B ⇒ S 𝔽 B)
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀R∀S∀A (R 𝔽 A & R ≣ S ⇒ S 𝔽 A) ¡

R,S,A ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **R ≣ S** ,! 2 (Prem) ¡

A ≡ **A** ,! 3 (∀E: II1.9) ¡

R 𝔽 **A** & **R ≣ S** & **A** ≡ **A** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **R ≣ S** & **A** ≡ **A** ⇒ **S** 𝔽 **A**) ,! 5 (∀E: P11) ¡

R 𝔽 **A** & **R ≣ S** & **A** ≡ **A** ⇒ **S** 𝔽 **A** ,! 6 (()E: 5) ¡

S 𝔽 **A** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R 𝔽 **A** & **R ≣ S** ⇒ **S** 𝔽 **A** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **R ≣ S** ⇒ **S** 𝔽 **A**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀A (R 𝔽 A & R ≣ S ⇒ S 𝔽 A) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **13.** ¡

⊦ ∀R∀A∀B (R 𝔽 A & A ≡ B ⇒ R 𝔽 B) ¡

R,A,B ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **R** ,! 3 (∀E: C1.7) ¡

R 𝔽 **A** & **R** ≣ **R** & **A** ≡ **B** ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **R** ≣ **R** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B**) ,! 5 (∀E: P11) ¡

R 𝔽 **A** & **R** ≣ **R** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B** ,! 6 (()E: 5) ¡

R 𝔽 **B** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀A∀B (R 𝔽 A & A ≡ B ⇒ R 𝔽 B) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **14.** ¡

⊦ ∀R∀A∀B (R 𝔽 A & B ≡ A ⇒ R 𝔽 B) ¡

R,A,B ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** & **B** ≡ **A** ,! 2 (Prem) ¡

R 𝔽 **A** ,! 3 (&E: 2) ¡

B ≡ **A** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**B** ≡ **A** ⇒ **A** ≡ **B**) ,! 5 (∀E: II1.10) ¡

B ≡ **A** ⇒ **A** ≡ **B** ,! 6 (()E: 5) ¡

A ≡ **B** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

R 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B**) ,! 9 (∀E: P13) ¡

R 𝔽 **A** & **A** ≡ **B** ⇒ **R** 𝔽 **B** ,! 10 (()E: 9) ¡

R 𝔽 **B** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R 𝔽 **A** & **B** ≡ **A** ⇒ **R** 𝔽 **B** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R** 𝔽 **A** & **B** ≡ **A** ⇒ **R** 𝔽 **B**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀A∀B (R 𝔽 A & B ≡ A ⇒ R 𝔽 B) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀R∀A (f R & A ⊆ (R^D) ⇒ (R ⌈ A) 𝔽 A) ¡

R,A ,! 1 (Prem) ¡

f R & A ⊆ (R^D) ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

(**f R ⇒ f (R ⌈ A)**) ,! 4 (∀E: P4) ¡

f R ⇒ f (R ⌈ A) ,! 5 (()E: 4) ¡

f (R ⌈ A) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

A ⊆ (R^D) ,! 7 (&E: 2) ¡

(**A ⊆ (R^D) ⇒ ((R ⌈ A)^D) ≡ A**) ,! 8 (∀E: C7.31) ¡

A ⊆ (R^D) ⇒ ((R ⌈ A)^D) ≡ A ,! 9 (()E: 8) ¡

((R ⌈ A)^D) ≡ A ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((R ⌈ A)^D) ≡ A & f (R ⌈ A) ,! 11 (&I: 6,10) ¡

(R ⌈ A) 𝔽 A ,! 12 (𝕊I: P10,11) ¡

f R & A ⊆ (R^D) ⇒ (R ⌈ A) 𝔽 A ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(**f R & A ⊆ (R^D) ⇒ (R ⌈ A) 𝔽 A**) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀R∀A (f R & A ⊆ (R^D) ⇒ (R ⌈ A) 𝔽 A) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & S 𝔽 B & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ (R ⊔ S) 𝔽 (A ∪ B)) ¡

R,S,A,B ,! 1 (Prem) ¡

R 𝔽 A & S 𝔽 B & (A ∩ B) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

! First, we unpack the premise. ¡

R 𝔽 A ,! 3 (&E: 2) ¡

(R^D) ≡ A & f R ,! 4 (𝕊E: P10,3) ¡

(R^D) ≡ A ,! 5 (&E: 4) ¡

f R ,! 6 (&E: 4) ¡

S 𝔽 B ,! 7 (&E: 2) ¡

(S^D) ≡ B & f S ,! 8 (𝕊E: P10,7) ¡

(S^D) ≡ B ,! 9 (&E: 8) ¡

f S ,! 10 (&E: 8) ¡

(A ∩ B) ≡ ϕ ,! 11 (&E: 2) ¡

! To show: ((R ⊔ S)^D) ≡ (A ∪ B) ¡

(R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B ,! 12 (&I: 5,9) ¡

((R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B ⇒ ((R ⊔ S)^D) ≡ (A ∪ B))
,! 13 (∀E: C5.20) ¡

(R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B ⇒ ((R ⊔ S)^D) ≡ (A ∪ B)
,! 14 (()E: 13) ¡

((R ⊔ S)^D) ≡ (A ∪ B) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

! To show: f (R ⊔ S) ¡

f R & f S ,! 15 (&I: 6,10) ¡

f R & f S & (R^D) ≡ A ,! 16 (&I: 5,15) ¡

f R & f S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B ,! 17 (&I: 9,16) ¡

f R & f S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B & (A ∩ B) ≡ ϕ
,! 18 (&I: 11,17) ¡

(f R & f S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ f (R ⊔ S))
,! 19 (∀E: P8) ¡

f R & f S & (R^D) ≡ A & (S^D) ≡ B & (A ∩ B) ≡ ϕ ⇒ f (R ⊔ S)
,! 20 (()E: 19) ¡

f (R ⊔ S) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((R ⊔ S)^D) ≡ (A ∪ B) & f (R ⊔ S) ,! 22 (&I: 15,21) ¡

(R ⊔ S) 𝔽 (A ∪ B) ,! 23 (𝕊I: P10,22) ¡

R 𝔽 A & S 𝔽 B & (A ∩ B) ≡ ϕ ⇒ (R ⊔ S) 𝔽 (A ∪ B)
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(R 𝔽 A & S 𝔽 B & (A ∩ B) ≡ ϕ ⇒ (R ⊔ S) 𝔽 (A ∪ B))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀R∀S∀A∀B (R 𝔽 A & S 𝔽 B & (A ∩ B) ≡ ϕ ⇒ (R ⊔ S) 𝔽 (A ∪ B))
! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ Φ 𝔽 ϕ ¡

(Φ^D) ≡ ϕ & **f** Φ ,! 1 (&I: C5.22,9) ¡

Φ 𝔽 ϕ ! 2 (𝕊I: P10,1) ¡

▯

! P18 and P19 are needed to introduce the 𝕋-definition of P20. P18 is unusual, in that it appeals only to a proposition from chapter 5, and so could have been placed in that chapter, rather than the present one. ¡

! **18.** ¡

⊢ ∀R∀x (**f** R & (R^D)[x] ⇒ ∃a R[x,a]) ¡

R,**x** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & (**R**^D)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

(**R**^D)[**x**] ,! 3 (&E: 2) ¡

((**R**^D)[**x**] ⇒ ∃y R[**x**,y]) ,! 4 (∀E: C5.3) ¡

(**R**^D)[**x**] ⇒ ∃y R[**x**,y] ,! 5 (()E: 4) ¡

∃y R[**x**,y] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

R[**x**,**y**] ,! 7 (∃E: 6) ¡

∃a R[**x**,a] ,! 8 (∃I: 7) ¡

f **R** & (**R**^D)[**x**] ⇒ ∃a R[**x**,a] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**f** **R** & (**R**^D)[**x**] ⇒ ∃a R[**x**,a]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀R∀x (**f** R & (R^D)[x] ⇒ ∃a R[x,a]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ∀R∀x (**f** R & (R^D)[x] ⇒ ∀y∀z(R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z)) ¡

R,**x** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & (**R**^D)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

f **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

∀x∀y∀z (**R**[x,y] & **R**[x,z] ⇒ y = z) ,! 4 (𝕊E: P1,3) ¡

∀y∀z (**R**[**x**,y] & **R**[**x**,z] ⇒ y = z) ,! 5 (∀E: 4) ¡

f **R** & (**R**ᴰ)[**x**] ⇒ ∀y∀z(**R**[**x**,y] & **R**[**x**,z] ⇒ y = z)
,! 6 (⇒I: 2,5) ¡

(**f** **R** & (**R**ᴰ)[**x**] ⇒ ∀y∀z(**R**[**x**,y] & **R**[**x**,z] ⇒ y = z))
,! 7 (()I: 6) ¡

∀R∀x (**f** R & (Rᴰ)[x] ⇒ ∀y∀z(R[x,y] & R[x,z] ⇒ y = z))
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **20.** (**R**´**x**) refers to the thing **y** to which **x** bears **R**. It presupposes that **R** is functional and **x** is in the domain of **R**, which ensures that **y** exists (P18) and is unique (P19). ¡

𝕋 ´ ; (**R**´**x**) ; **f** **R** & (**R**ᴰ)[**x**] ; **R**[**x**,**y**] ¡! (𝕋D: P18,P19) ¡

! **21.** ¡

⊢ ∀R∀x∀y (**f** R & R[x,y] ⇒ y = (R´x)) ¡

R,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

f **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

R[**x**,**y**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**ᴰ)[**x**]) ,! 5 (∀E: C5.5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R**ᴰ)[**x**] ,! 6 (()E: 5) ¡

(**R**ᴰ)[**x**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f **R** & (**R**ᴰ)[**x**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

R[**x**,(**R**´**x**)] ,! 9 (𝕋I: P20,8) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,(**R**´**x**)] ,! 10 (&I: 2,9) ¡

(**f** **R** & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,(**R**´**x**)] ⇒ **y** = (**R**´**x**))
,! 11 (∀E: P2;
(**R**´**x**): P20,8)
¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] & **R**[**x**,(**R**´**x**)] ⇒ **y** = (**R**´**x**)
,! 12 (()E: 11) ¡

y = (**R**´**x**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**) ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(**f** **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**)) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀R∀x∀y (**f** R & R[x,y] ⇒ y = (R´x)) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **22.** ¡

⊦ ∀R∀x∀y (**f** R & R[x,y] ⇒ (R´x) = y) ¡

R,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(**f** **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**)) ,! 3 (∀E: P21) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**) ,! 4 (()E: 3) ¡

y = (**R**´**x**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

y = **y** ,! 6 (=E: 5,5) ¡

(**R**´**x**) = **y** ,! 7 (=E: 5,6) ¡

f **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**´**x**) = **y** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**f** **R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**´**x**) = **y**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀x∀y (**f** R & R[x,y] ⇒ (R´x) = y) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **23.** ¡

⊦ ∀R∀S∀x (**f** R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x)) ¡

R,**S**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & **S** ⫅ **R** & (**S**^{D})[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

f **R** & **S** ⫅ **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**S**^{D})[**x**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(**f** **R** & **S** ⫅ **R** ⇒ **f** **S**) ,! 5 (∀E: P3) ¡

f **R** & **S** ⫅ **R** ⇒ **f** **S** ,! 6 (()E: 5) ¡

f **S** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

f **S** & (**S**^{D})[**x**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

S[**x**,(**S**´**x**)] ,! 9 (𝕋I: P20,8) ¡

S ⫅ **R** ,! 10 (&E: 2) ¡

S[x,(S´x)] & S ⫅ R ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(S[x,(S´x)] & S ⫅ R ⇒ R[x,(S´x)]) ,! 12 (∀E: C1.2; (S´x): P20,8) ¡

S[x,(S´x)] & S ⫅ R ⇒ R[x,(S´x)] ,! 13 (()E: 12) ¡

R[x,(S´x)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

f R ,! 15 (&E: 2) ¡

f R & R[x,(S´x)] ,! 15 (&I: 14,15) ¡

(f R & R[x,(S´x)] ⇒ (S´x) = (R´x)) ,! 16 (∀E: P21; (S´x): P20,8) ¡

f R & R[x,(S´x)] ⇒ (S´x) = (R´x) ,! 17 (()E: 16) ¡

(S´x) = (R´x) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x) ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x)) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀R∀S∀x (f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x)) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **24.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (R´x) = (S´x)) ¡

R,S,x ,! 1 (Prem) ¡

f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ,! 2 (Prem) ¡

(f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x)) ,! 3 (∀E: P23) ¡

f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (S´x) = (R´x) ,! 4 (()E: 3) ¡

(S´x) = (R´x) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(R´x) = (R´x) ,! 6 (=E: 5,5) ¡

(R´x) = (S´x) ,! 7 (=E: 5,6) ¡

f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (R´x) = (S´x) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(f R & S ⫅ R & (S^D)[x] ⇒ (R´x) = (S´x)) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀x (**f** R & S ⊆ R & (S^{D})[x] ⇒ (R´x) = (S´x))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **25.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (**f** R & (R^{D})[x] & R ≣ S ⇒ (R´x) = (S´x)) ¡

R,S,x ,! 1 (Prem) ¡

f R & (**R**^{D})[**x**] & **R** ≣ **S** ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R**^{D})[**x**] ,! 4 (&E: 2) ¡

R ≣ **S** ,! 5 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S**) ,! 6 (∀E: C1.9) ¡

R ≣ **S** ⇒ **R** ⊆ **S** ,! 7 (()E: 6) ¡

R ⊆ **S** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

R ⊆ **S** & (**R**^{D})[**x**] ,! 9 (&I: 4,8) ¡

f R & **R** ≣ **S** ,! 10 (&I: 3,5) ¡

(**f R** & **R** ≣ **S** ⇒ **f S**) ,! 11 (∀E: P5) ¡

f R & **R** ≣ **S** ⇒ **f S** ,! 12 (()E: 11) ¡

f S ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

f S & **R** ⊆ **S** & (**R**^{D})[**x**] ,! 14 (&I: 9,13) ¡

(**f S** & **R** ⊆ **S** & (**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**))
,! 15 (∀E: P23) ¡

f S & **R** ⊆ **S** & (**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**)
,! 16 (()E: 15) ¡

(**R**´**x**) = (**S**´**x**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

f R & (**R**^{D})[**x**] & **R** ≣ **S** ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**) ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(**f R** & (**R**^{D})[**x**] & **R** ≣ **S** ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀R∀S∀x (**f** R & (R^{D})[x] & R ≣ S ⇒ (R´x) = (S´x))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **26.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (f R & (R^D)[x] & S ≣ R ⇒ (R´x) = (S´x)) ¡

R,S,x ,! 1 (Prem) ¡

f R & (R^D)[x] & S ≣ R ,! 2 (Prem) ¡

f R & (R^D)[x] ,! 3 (&E: 2) ¡

S ≣ R ,! 4 (&E: 2) ¡

(S ≣ R ⇒ R ≣ S) ,! 5 (∀E: P8) ¡

S ≣ R ⇒ R ≣ S ,! 6 (()E: 6) ¡

R ≣ S ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f R & (R^D)[x] & R ≣ S ,! 10 (&I: 3,7) ¡

(f R & (R^D)[x] & R ≣ S ⇒ (R´x) = (S´x))
,! 11 (∀E: P25) ¡

f R & (R^D)[x] & R ≣ S ⇒ (R´x) = (S´x)
,! 12 (()E: 11) ¡

(R´x) = (S´x) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

f R & (R^D)[x] & S ≣ R ⇒ (R´x) = (S´x) ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(f R & (R^D)[x] & S ≣ R ⇒ (R´x) = (S´x))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀R∀S∀x (f R & (R^D)[x] & S ≣ R ⇒ (R´x) = (S´x))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **27.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x∀y (R ≣ S & (R´x) = y ⇒ (S´x) = y) ¡

R,S,x,y ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ S & (R´x) = y ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ S ,! 3 (&E: 2) ¡

(R´x) = y ,! 4 (&E: 2) ¡

f R & (R^D)[x] ,! 5 (𝕀E: P20,4) ¡

f R & (R^D)[x] & R ≣ S ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(**f** **R** & (**R**D)[**x**] & **R** ≣ **S** ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**))
,! 7 (∀E: P25) ¡

f **R** & (**R**D)[**x**] & **R** ≣ **S** ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**)
,! 8 (()E: 7) ¡

(**R**´**x**) = (**S**´**x**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**S**´**x**) = **y** ,! 10 (=E: 4,9) ¡

R ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** ⇒ (**S**´**x**) = **y** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**R** ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** ⇒ (**S**´**x**) = **y**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀R∀S∀x∀y (R ≣ S & (R´x) = y ⇒ (S´x) = y)
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **28.** ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y (R ≣ S & (S´x) = y ⇒ (R´x) = y) ¡

R,**S**,**x**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** & (**S**´**x**) = **y** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **S** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**S**´**x**) = **y** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** ⇒ **S** ≣ **R**) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

R ≣ **S** ⇒ **S** ≣ **R** ,! 6 (()E: 5) ¡

S ≣ **R** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

S ≣ **R** & (**S**´**x**) = **y** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**S** ≣ **R** & (**S**´**x**) = **y** ⇒ (**R**´**x**) = **y**) ,! 9 (∀E: P27) ¡

S ≣ **R** & (**S**´**x**) = **y** ⇒ (**R**´**x**) = **y** ,! 10 (()E: 9) ¡

(**R**´**x**) = **y** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

R ≣ **S** & (**S**´**x**) = **y** ⇒ (**R**´**x**) = **y** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**R** ≣ **S** & (**S**´**x**) = **y** ⇒ (**R**´**x**) = **y**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀R∀S∀x∀y (R ≣ S & (S´x) = y ⇒ (R´x) = y)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **29.** ¡

⊦ ∀R∀S∀x∀y∀z (R ≣ S & (R´x) = y & (S´x) = z ⇒ y = z) ¡

R,**S**,**x**,**y**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

R ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** & (**S**´**x**) = **z** ,! 2 (Prem) ¡

R ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**S**´**x**) = **z** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**R** ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** ⇒ (**S**´**x**) = **y**) ,! 5 (∀E: P27) ¡

R ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** ⇒ (**S**´**x**) = **y** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**S**´**x**) = **y** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

y = **z** ,! 9 (=E: 4,7) ¡

R ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** & (**S**´**x**) = **z** ⇒ **y** = **z** ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**R** ≣ **S** & (**R**´**x**) = **y** & (**S**´**x**) = **z** ⇒ **y** = **z**)
,! 11 (()I: 10) ¡

∀R∀S∀x∀y∀z (R ≣ S & (R´x) = y & (S´x) = z ⇒ y = z)
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **30.** P30 provides a convenient way of proving that functional relationships are equivalent. ¡

⊦ ∀R∀S (**f** R & (R^D) ≡ (S^D) & ∀x ((R^D)[x] ⇒ (R´x) = (S´x))
⇒ R ≣ S) ¡

R,**S** ,! 1 (Prem) ¡

f **R** & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) & ∀x ((**R**^{D})[x] ⇒ (**R**´x) = (**S**´x))
,! 2 (Prem) ¡

f **R** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ,! 4 (&E: 2) ¡

∀x ((**R**^{D})[x] ⇒ (**R**´x) = (**S**´x)) ,! 5 (&E: 2) ¡

x,**y** ,! 6 (Prem) ¡

R[**x**,**y**] ,! 7 (Prem) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{D})[**x**]) ,! 8 (∀E: C5.5) ¡

R[**x**,**y**] ⇒ (**R**^{D})[**x**] ,! 9 (()E: 8) ¡

(**R**^{D})[**x**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**)) ,! 11 (∀E: 5) ¡

(**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**)	,! 12 (()E: 11) ¡
(**R**´**x**) = (**S**´**x**)	,! 13 (⇒E: 10,12) ¡
f R & **R**[**x**,**y**]	,! 14 (&I: 3,7) ¡
(**f R** & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**))	,! 15 (∀E: P21) ¡
f R & **R**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**R**´**x**)	,! 16 (()E: 15) ¡
y = (**R**´**x**)	,! 17 (⇒E: 14,16) ¡
y = (**S**´**x**)	,! 18 (=E: 13,17) ¡
f S & (**S**^{D})[**x**]	,! 19 (𝕋E: P20,18) ¡
S[**x**,(**S**´**x**)]	,! 20 (𝕋I: P20,19) ¡
S[**x**,**y**]	,! 21 (=E: 18,20) ¡
R[**x**,**y**] ⇒ **S**[**x**,**y**]	,! 22 (⇒I: 7,21) ¡
S[**x**,**y**]	,! 23 (Prem) ¡
(**S**[**x**,**y**] ⇒ (**S**^{D})[**x**])	,! 24 (∀E: C5.5) ¡
S[**x**,**y**] ⇒ (**S**^{D})[**x**]	,! 25 (()E: 24) ¡
(**S**^{D})[**x**]	,! 26 (⇒E: 23,25) ¡
(**S**^{D})[**x**] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D})	,! 27 (&I: 4,26) ¡
((**S**^{D})[**x**] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ⇒ (**R**^{D})[**x**])	,! 28 (∀E: II1.36) ¡
(**S**^{D})[**x**] & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) ⇒ (**R**^{D})[**x**]	,! 29 (()E: 28) ¡
(**R**^{D})[**x**]	,! 30 (⇒E: 27,29) ¡
((**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**))	,! 31 (∀E: 5) ¡
(**R**^{D})[**x**] ⇒ (**R**´**x**) = (**S**´**x**)	,! 32 (()E: 31) ¡
(**R**´**x**) = (**S**´**x**)	,! 33 (⇒E: 30,32) ¡
f S & (**S**^{D})[**x**]	,! 34 (𝕋E: P20,33) ¡
f S	,! 35 (&E: 34) ¡
f S & **S**[**x**,**y**]	,! 36 (&I: 23,35) ¡
(**f S** & **S**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**S**´**x**))	,! 37 (∀E: P21) ¡

f S & **S**[**x**,**y**] ⇒ **y** = (**S**´**x**) ,! 38 (()E: 37) ¡

y = (**S**´**x**) ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

y = (**R**´**x**) ,! 40 (=E: 33,39) ¡

f R & (**R**^{D})[**x**] ,! 41 (&I: 3,30) ¡

R[**x**,(**R**´**x**)] ,! 42 (𝕋I: P20,41) ¡

R[**x**,**y**] ,! 43 (=E: 40,42) ¡

S[**x**,**y**] ⇒ **R**[**x**,**y**] ,! 44 (⇒I: 23,43) ¡

R[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**] ,! 45 (⇔I: 22,44) ¡

(**R**[**x**,**y**] ⇔ **S**[**x**,**y**]) ,! 46 (()I: 45) ¡

∀x∀y (**R**[x,y] ⇔ **S**[x,y]) ,! 47 (∀I: 6,46) ¡

R ≣ **S** ,! 48 (𝕊I: C1.5) ¡

f R & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) & ∀x ((**R**^{D})[x] ⇒ (**R**´x) = (**S**´x)) ⇒ **R** ≣ **S**
,! 49 (⇒I: 2,48) ¡

(**f R** & (**R**^{D}) ≡ (**S**^{D}) & ∀x ((**R**^{D})[x]
⇒ (**R**´x) = (**S**´x)) ⇒ **R** ≣ **S**)
,! 50 (()I: 49) ¡

∀R∀S (**f** R & (R^{D}) ≡ (S^{D}) & ∀x ((R^{D})[x] ⇒ (R´x) = (S´x))
⇒ R ≣ S)
! 51 (∀I: 1,50) ¡

▯

! **31.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (**f** (R ⊔ S) & (R^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x)) ¡

R,**S**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & (**R**^{D})[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

R ⫅ (**R** ⊔ **S**) ,! 3 (∀E: C2.7) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & **R** ⫅ (**R** ⊔ **S**) & (**R**^{D})[**x**] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(**f** (**R** ⊔ **S**) & **R** ⫅ (**R** ⊔ **S**) & (**R**^{D})[**x**]
⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**))
,! 5 (∀E: P24) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & **R** ⫅ (**R** ⊔ **S**) & (**R**^{D})[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**)
,! 6 (()E: 5) ¡

((R ⊔ S)´x) = (R´x) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f (R ⊔ S) & (R^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x)
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(f (R ⊔ S) & (R^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x))
,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀x (f (R ⊔ S) & (R^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **32.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (f (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)) ¡

R,S,x ,! 1 (Prem) ¡

f (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ,! 2 (Prem) ¡

S ⊆ (R ⊔ S) ,! 3 (∀E: C2.8) ¡

f (R ⊔ S) & S ⊆ (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(f (R ⊔ S) & S ⊆ (R ⊔ S) & (S^{D})[x]
⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x))
,! 5 (∀E: P24) ¡

f (R ⊔ S) & S ⊆ (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)
,! 6 (()E: 5) ¡

((R ⊔ S)´x) = (S´x) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

f (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(f (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x))
,! 9 (()I: 8) ¡

∀R∀S∀x (f (R ⊔ S) & (S^{D})[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (S´x))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **33.** ¡

⊢ ∀R∀S∀x (f R & f S & ((R^{D}) ∩ (S^{D})) ≡ φ & ((R ⊔ S)^{D})[x]
⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)) ¡

R,S,x ,! 1 (Prem) ¡

f R & f S & ((R^{D}) ∩ (S^{D})) ≡ φ & ((R ⊔ S)^{D})[x]
,! 2 (Prem) ¡

f R & **f S** & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ φ ,! 3 (&I: 2) ¡

(($\mathbf{R}$ ⊔ $\mathbf{S})^D$)[**x**] ,! 4 (&I: 2) ¡

(**f R** & **f S** & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ φ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**))
,! 5 (∀E: P7) ¡

f R & **f S** & (($\mathbf{R}^D$) ∩ ($\mathbf{S}^D$)) ≡ φ ⇒ **f** (**R** ⊔ **S**)
,! 6 (()E: 5) ¡

f (**R** ⊔ **S**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

((($\mathbf{R}$ ⊔ $\mathbf{S})^D$)[**x**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ∨ ($\mathbf{S}^D$)[**x**])
,! 8 (∀E: C5.3) ¡

(($\mathbf{R}$ ⊔ $\mathbf{S})^D$)[**x**] ⇒ ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ∨ ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 9 (()E: 8) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] ∨ ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 11 (Prem) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ,! 12 (&I: 7,11)

(**f** (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**))
,! 13 (∀E: P31) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{R}^D$)[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**)
,! 14 (()E: 13) ¡

((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**) ∨ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**)
,! 16 (∨I: 15) ¡

($\mathbf{R}^D$)[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**) ∨ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**)
,! 17 (⇒I: 11,16) ¡

($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 18 (Prem) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ,! 19 (&I: 7,18)

(**f** (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**))
,! 20 (∀E: P32) ¡

f (**R** ⊔ **S**) & ($\mathbf{S}^D$)[**x**] ⇒ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**)
,! 21 (()E: 20) ¡

((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**R**´**x**) ∨ ((**R** ⊔ **S**)´**x**) = (**S**´**x**)
,! 23 (∨I: 22) ¡

(S^D)[x] ⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)
,! 24 (⇒I: 18,23) ¡

((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)
,! 25 (∨E: 10,17,24)
¡

f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ ϕ & ((R ⊔ S)^D)[x]
⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x)
,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ ϕ & ((R ⊔ S)^D)[x]
⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x))
,! 27 (()I: 26) ¡

∀R∀S∀x (f R & f S & ((R^D) ∩ (S^D)) ≡ ϕ & ((R ⊔ S)^D)[x]
⇒ ((R ⊔ S)´x) = (R´x) ∨ ((R ⊔ S)´x) = (S´x))
! 28 (∀I: 1,27) ¡

▯

! **34.** ¡

⊢ ∀R∀A∀x (f R & A ⊆ (R^D) & A[x] ⇒ ((R ⌈ A)´x) = (R´x)) ¡

R,A,x ,! 1 (Prem) ¡

f R & A ⊆ (R^D) & A[x] ,! 2 (Prem) ¡

f R ,! 3 (&E: 2) ¡

A ⊆ (R^D) ,! 4 (&E: 2) ¡

A[x] ,! 5 (&E: 2) ¡

(R ⌈ A) ⫅ R ,! 6 (∀E: C7.7) ¡

f R & (R ⌈ A) ⫅ R ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(A ⊆ (R^D) ⇒ ((R ⌈ A)^D) ≡ A) ,! 8 (∀E: C7.31) ¡

A ⊆ (R^D) ⇒ ((R ⌈ A)^D) ≡ A ,! 9 (()E: 8) ¡

((R ⌈ A)^D) ≡ A ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

A[x] & ((R ⌈ A)^D) ≡ A ,! 11 (&I: 5,10) ¡

(A[x] & ((R ⌈ A)^D) ≡ A ⇒ ((R ⌈ A)^D)[x])
,! 12 (∀E: II1.36) ¡

A[x] & ((R ⌈ A)^D) ≡ A ⇒ ((R ⌈ A)^D)[x] ,! 13 (()E: 12) ¡

((R ⌈ A)^D)[x] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

f R & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R** & ((**R** ⌈ **A**)^{D})[**x**] ,! 15 (&I: 7,14) ¡

(**f R** & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R** & ((**R** ⌈ **A**)^{D})[**x**] ⇒ ((**R** ⌈ **A**)´**x**) = (**R**´**x**))
,! 16 (∀E: P23) ¡

f R & (**R** ⌈ **A**) ⫅ **R** & ((**R** ⌈ **A**)^{D})[**x**] ⇒ ((**R** ⌈ **A**)´**x**) = (**R**´**x**)
,! 17 (()E: 16) ¡

((**R** ⌈ **A**)´**x**) = (**R**´**x**) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

f R & **A** ⊆ (**R**^{D}) & **A**[**x**] ⇒ ((**R** ⌈ **A**)´**x**) = (**R**´**x**)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(**f R** & **A** ⊆ (**R**^{D}) & **A**[**x**] ⇒ ((**R** ⌈ **A**)´**x**) = (**R**´**x**))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀R∀A∀x (**f** R & A ⊆ (R^{D}) & A[x] ⇒ ((R ⌈ A)´x) = (R´x))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯