!**CHAPTER 10**

**THE NUMBERS 3 AND 4**¡

! In this chapter several simple propositions about the numbers 3 and 4 will be established. ¡

! **1.** ¡

⊢ (2') = 3 ¡

ω[2] & σ[2,3] ,! 1 (&I: C9.11,Three) ¡

( ω[2] & σ[2,3] ⇒ (2') = 3 ) ! 2 (∀E: C8.18) ¡

ω[2] & σ[2,3] ⇒ (2') = 3 ! 3 (()E: 2) ¡

(2') = 3 ! 4 (⇒E: 1,3) ¡

□

! **2.** ¡

⊢ ω[3] ¡

( (2') = 3 ⇒ ω[3] ) ! 1 (∀E: C8.26) ¡

(2') = 3 ⇒ ω[3] ! 2 (()E: 1) ¡

ω[3] ! 3 (⇒E: P1,2) ¡

□

! **3.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c ( ¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b ⇒ 𝔑[3,(a b c ∨)] ) ¡

**a**,**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ,! 2 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ,! 4 (&E: 2) ¡

( ¬ **a** = **b** ⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ) ,! 5 (∀E: C9.12) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[2] & 𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ,! 8 (&I: C9.11,7) ¡

( ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ⇒ ¬ (**a** **b** ‡)[**c**] )
,! 9 (∀E: II9.4) ¡

¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ⇒ ¬ (**a** **b** ‡)[**c**] ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ (a b ‡)[c] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

ω[2] & ♏[2,(a b ‡)] & ¬ (a b ‡)[c] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

( ω[2] & ♏[2,(a b ‡)] & ¬ (a b ‡)[c]
⇒ ♏[(2'),((a b ‡) ∪ (c•))] )
,! 13 (∀E: C8.22) ¡

ω[2] & ♏[2,(a b ‡)] & ¬ (a b ‡)[c]
⇒ ♏[(2'),((a b ‡) ∪ (c•))]
,! 14 (()E: 13) ¡

♏[(2'),((a b ‡) ∪ (c•))] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

♏[3,((a b ‡) ∪ (c•))] ,! 16 (=E: P1,15) ¡

ω[3] & ♏[3,((a b ‡) ∪ (c•))] ,! 17 (&I: P2,16) ¡

(a b c ∨) ≡ ((a b ‡) ∪ (c•)) ,! 18 (∀E: II9.7) ¡

ω[3] & ♏[3,((a b ‡) ∪ (c•))]
& (a b c ∨) ≡ ((a b ‡) ∪ (c•))
,! 19 (&I: 17,18) ¡

( ω[3] & ♏[3,((a b ‡) ∪ (c•))]
& (a b c ∨) ≡ ((a b ‡) ∪ (c•))
⇒ ♏[3,(a b c ∨)] )
,! 20 (∀E: C4.6) ¡

ω[3] & ♏[3,((a b ‡) ∪ (c•))]
& (a b c ∨) ≡ ((a b ‡) ∪ (c•))
⇒ ♏[3,(a b c ∨)]
,! 21 (()E: 20) ¡

♏[3,(a b c ∨)] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b ⇒ ♏[3,(a b c ∨)]
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

( ¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b ⇒ ♏[3,(a b c ∨)] )
,! 24 (()I: 23) ¡

∀a∀b∀c ( ¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b ⇒ ♏[3,(a b c ∨)] )
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ ♏[3,(0 1 2 ∨)] ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 ,! 1 (&I: C9.5,C9.17)

¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 ,! 2 (&I: C9.18,1) ¡

( ¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 ⇒ ℕ[3,(0 1 2 ∨)] )
,! 3 (∀E: P3) ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 ⇒ ℕ[3,(0 1 2 ∨)]
,! 4 (()E: 3) ¡

ℕ[3,(0 1 2 ∨)] ! 5 (⇒E: 2,4) ¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ((1')') = 3 ¡

((1')') = 3 ,! 1 (=E: C9.10,P1) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ (((0')')') = 3 ¡

(((0')')') = 3 ,! 1 (=E: C9.1,P5) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ¬ 3 = 0 ¡

3 = 0 ,! 1 (Prem) ¡

(2') = 0 ,! 2 (=E: P1,1) ¡

¬ (2') = 0 ,! 3 (∀E: C8.32) ¡

𝔉 ,! 4 (𝔉I: 2,3) ¡

3 = 0 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 1,4) ¡

¬ 3 = 0 ! 6 (¬I: 5) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ¬ 3 = 1 ¡

3 = 1 ,! 1 (Prem) ¡

(2') = 1 ,! 2 (=E: P1,1) ¡

(2') = (0') ,! 3 (=E: C9.1,2) ¡

( (2') = (0') ⇒ 2 = 0 ) ,! 4 (∀E: C8.31) ¡

(2') = (0') ⇒ 2 = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

2 = 0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

𝔉 ,! 7 (𝔉I: C9.17,6) ¡

3 = 1 ⇒ 𝔉 ,! 8 (⇒I: 1,7) ¡

¬ 3 = 1 ! 9 (¬I: 8) ¡

□

! **9.** ¡

⊢ ¬ 3 = 2 ¡

¬ (2') = 2 ,! 1 (∀E: C8.35) ¡

3 = 2 ,! 2 (Prem) ¡

(2') = 2 ,! 3 (=E: P1,2) ¡

𝔉 ,! 4 (𝔉I: 1,3) ¡

3 = 2 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 2,4) ¡

¬ 3 = 2 ! 6 (¬I: 5) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ ¬ (0 1 2 ∨)[3] ¡

¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 ,! 1 (&I: P7,P8) ¡

¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2 ,! 2 (&I: P9,1) ¡

( ¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2 ⇒ ¬ (0 1 2 ∨)[3] )
,! 3 (∀E: II9.8) ¡

¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2 ⇒ ¬ (0 1 2 ∨)[3]
,! 4 (()E: 3) ¡

¬ (0 1 2 ∨)[3] ! 5 (⇒E: 2,4) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ (3') = 4 ¡

ω[3] & σ[3,4] ,! 1 (&I: P2,Four) ¡

( ω[3] & σ[3,4] ⇒ (3') = 4 ) ! 2 (∀E: C8.18) ¡

ω[3] & σ[3,4] ⇒ (3') = 4 ! 3 (()E: 2) ¡

(3') = 4 ! 4 (⇒E: 1,3) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ω[4] ¡

( (3') = 4 ⇒ ω[4] ) ! 1 (∀E: C8.26) ¡

(3') = 4 ⇒ ω[4] ! 2 (()E: 1) ¡

ω[4] ! 3 (⇒E: P11,2) ¡

▯

! **13.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d ( ¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b & ¬ d = a & ¬ d = b & ¬ d = c
⇒ ℿ[4,(a b c d ∀)] ) ¡

**a**,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c** ,! 2 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c** ,! 4 (&E: 2) ¡

( ¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ⇒ ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] ) ,! 5 (∀E: P3) ¡

¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** ⇒ ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[3] & ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] ,! 8 (&I: P2,7) ¡

( ¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c** ⇒ ¬ (**a** **b** **c** ∨)[**d**] ) ,! 9 (∀E: II9.8) ¡

¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c** ⇒ ¬ (**a** **b** **c** ∨)[**d**] ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ (**a** **b** **c** ∨)[**d**] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

ω[3] & ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] & ¬ (**a** **b** **c** ∨)[**d**] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

( ω[3] & ℿ[3,(**a** **b** **c** ∨)] & ¬ (**a** **b** **c** ∨)[**d**]
⇒ ℿ[(3'),((**a** **b** **c** ∨) ∪ (**d**•))] ) ,! 13 (∀E: C8.22) ¡

ω[3] & Ռ[3,(**a b c** ∨)] & ¬ (**a b c** ∨)[**d**]
⇒ Ռ[(3'),((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))]
,! 14 (()E: 13) ¡

Ռ[(3'),((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

Ռ[4,((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))] ,! 16 (=E: P11,15) ¡

ω[4] & Ռ[4,((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))] ,! 17 (&I: P12,16) ¡

(**a b c d** ∀) ≡ ((**a b c** ∨) ∪ (**d**•)) ,! 18 (∀E: II9.11) ¡

ω[4] & Ռ[4,((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))]
& (**a b c d** ∀) ≡ ((**a b c** ∨) ∪ (**d**•)) ,! 19 (&I: 17,18) ¡

( ω[4] & Ռ[4,((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))]
& (**a b c d** ∀) ≡ ((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))
⇒ Ռ[4,(**a b c d** ∀)] )
,! 20 (∀E: C4.6) ¡

ω[4] & Ռ[4,((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))]
& (**a b c d** ∀) ≡ ((**a b c** ∨) ∪ (**d**•))
⇒ Ռ[4,(**a b c d** ∀)] ,! 21 (()E: 20) ¡

Ռ[4,(**a b c d** ∀)] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c**
⇒ Ռ[4,(**a b c d** ∀)]
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

( ¬ **a** = **b** & ¬ **c** = **a** & ¬ **c** = **b** & ¬ **d** = **a** & ¬ **d** = **b** & ¬ **d** = **c**
⇒ Ռ[4,(**a b c d** ∀)] )
,! 24 (()I: 23) ¡

∀a∀b∀c∀d ( ¬ a = b & ¬ c = a & ¬ c = b & ¬ d = a & ¬ d = b
& ¬ d = c
⇒ Ռ[4,(a b c d ∀)] )
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ Ռ[4,(0 1 2 3 ∀)] ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 ,! 1 (&I: C9.5,C9.17)
¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 ,! 2 (&I: C9.18,1) ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 & ¬ 3 = 0 ,! 3 (&I: P7,2) ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 & ¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1
,! 4 (&I: P8,3) ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 & ¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2
,! 5 (&I: P9,4) ¡

( ¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 & ¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2
⇒ ℕ[4,(0 1 2 3 ∀)] )
,! 6 (∀E: P13) ¡

¬ 0 = 1 & ¬ 2 = 0 & ¬ 2 = 1 & ¬ 3 = 0 & ¬ 3 = 1 & ¬ 3 = 2
⇒ ℕ[4,(0 1 2 3 ∀)]
,! 7 (()E: 6) ¡

ℕ[4,(0 1 2 3 ∀)] ! 8 (⇒E: 5,7) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ((2')') = 4 ¡

((2')') = 4 ,! 1 (=E: P1,P11) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ (((1')')') = 4 ¡

(((1')')') = 4 ,! 1 (=E: C9.10,P15) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ((((0')')')') = 4 ¡

((((0')')')') = 4 ,! 1 (=E: C9.1,P16) ¡

▯