!CHAPTER 2
AN INTERMEDIATE SUPPORT¡

! This chapter proves that the counting axioms can prove the numbering axioms:

$\forall n \forall P \ (\ \mathfrak{N}[n,P] \ \& \ \mathfrak{N}[0,P] \Rightarrow n = 0 \ )$

$\forall n \forall m \forall P \ (\ \omega[n] \ \& \ \exists p(\omega[p] \ \& \ \sigma[p,k]) \ \& \ \mathfrak{N}[n,P] \ \& \ \mathfrak{N}[k,P]$
$\qquad \Rightarrow n = k \ )$

$\forall P \ (\ \mathfrak{N}[0,P] \Leftrightarrow P \equiv \phi \ )$

$\forall n \forall m \forall P \forall Q \forall a \ (\ \omega[n] \ \& \ \sigma[n,m] \ \& \ \neg \ P[a] \ \& \ Q \equiv (P \cup (a^{\bullet})) \ \& \ \mathfrak{N}[n,P]$
$\qquad \Rightarrow \mathfrak{N}[m,Q] \ )$

$\forall n \forall m \forall P \forall Q \forall a \ (\ \omega[n] \ \& \ \sigma[n,m] \ \& \ \neg \ P[a] \ \& \ Q \equiv (P \cup (a^{\bullet})) \ \& \ \mathfrak{N}[m,Q]$
$\qquad \Rightarrow \mathfrak{N}[n,P] \ ) \ )$

$\forall P \forall a \forall n \ (\ \omega[n] \ \& \ \mathfrak{N}[n,P] \ \& \ \neg \ P[a] \Rightarrow \exists m \ (\omega[m] \ \& \ \mathfrak{N}[m,(P \cup (a^{\bullet}))]) \ )$

After this chapter, there will be no further appeals to the counting axioms, and only the number axioms will be used. ¡

! P1 appeals to the Numb axiom, and P2 and P3 are corollaries of P1. They establish the relationship between counting and numbering, which is evidently indispensable for the subsequent proofs of this chapter. ¡

! **1.** ¡

$\vdash \forall n \forall P \ (\ \mathfrak{N}[n,P] \Leftrightarrow \exists C \ (\ \mathfrak{C}[n,C] \ \& \ (C^{I}) \equiv P \ ) \ )$ ¡

$\mathbf{n},\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$(\ \mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}] \Leftrightarrow \exists C \ (\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ C[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y]) \ ) \ )$
,! 2 (∀E: Numb) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}] \Leftrightarrow \exists C \ (\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ C[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y]) \ )$
,! 3 (()E: 2) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}]$,! 4 (Prem) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}] \Rightarrow \exists C \ (\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ C[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y]) \ )$
,! 5 (⇔E: 4) ¡

$\exists C \ (\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},C] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ C[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y]) \ )$
,! 6 (⇒E: 4,5) ¡

$(\ \mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ \mathbf{C}[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y]) \ )$,! 7 (∃E: 6) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}] \ \& \ \forall y \ (\exists x \ \mathbf{C}[x,y] \Leftrightarrow \mathbf{P}[y])$,! 8 (()E: 7) ¡

$\mathfrak{C}[\mathbf{n},\mathbf{C}]$,! 9 (&E: 8) ¡

∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ,! 10 (&E: 8) ¡

(∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ⇒ (**C**^{I}) ≡ **P**),! 11 (∀E: III6.14) ¡

∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ⇒ (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 12 (()E: 11) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 14 (&I: 9,13) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P**) ,! 15 (()I: 14) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 16 (∃I: 15) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 17 (⇒I: 4,16) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 18 (Prem) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P**) ,! 19 (∃E: 18) ¡

ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 20 (()E: 19) ¡

ℭ[**n**,**C**] ,! 21 (&E: 20) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** ,! 22 (&E: 20) ¡

! To show: ∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ¡

y ,! 23 (Prem) ¡

∃x **C**[x,**y**] ,! 24 (Prem) ¡

C[**x**,**y**] ,! 25 (∃E: 24) ¡

C[**x**,**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 26 (&I: 22,25) ¡

(**C**[**x**,**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ⇒ **P**[**y**]) ,! 27 (∀E: III6.9) ¡

C[**x**,**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ⇒ **P**[**y**] ,! 28 (()E: 27) ¡

P[**y**] ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

∃x **C**[x,**y**] ⇒ **P**[**y**] ,! 30 (⇒I: 24,29) ¡

P[**y**] ,! 31 (Prem) ¡

P[**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 32 (&I: 22,31) ¡

(**P**[**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ⇒ ∃x **C**[x,**y**]) ,! 33 (∀E: III6.11) ¡

P[**y**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ⇒ ∃x **C**[x,**y**] ,! 34 (()E: 33) ¡

∃x **C**[x,**y**] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

P[**y**] ⇒ ∃x **C**[x,**y**] ,! 36 (⇒I: 31,35) ¡

∃x **C**[x,**y**] ⇔ **P**[**y**] ,! 37 (⇔I: 30,36) ¡

(∃x **C**[x,**y**] ⇔ **P**[**y**]) ,! 38 (()I: 37) ¡

∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ,! 39 (∀I: 23,38) ¡

𝔈[**n**,**C**] & ∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y]) ,! 40 (&I: 21,39) ¡

(𝔈[**n**,**C**] & ∀y (∃x **C**[x,y] ⇔ **P**[y])) ,! 41 (()I: 40) ¡

∃C (𝔈[**n**,C] & ∀y (∃x C[x,y] ⇔ **P**[y]))
,! 42 (∃I: 41) ¡

∃C (𝔈[**n**,C] & ∀y (∃x C[x,y] ⇔ **P**[y])) ⇒ 𝔑[**n**,**P**]
,! 43 (⇔E: 3) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 44 (⇒E: 42,43) ¡

∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ⇒ 𝔑[**n**,**P**] ,! 45 (⇒I: 18,44) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 46 (⇔I: 17,45) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**)) ,! 47 (()I: 46) ¡

∀n∀P (𝔑[n,P] ⇔ ∃C (𝔈[n,C] & (C^I) ≡ P))
! 48 (∀I: 1,47) ¡

▯

! **2.** ¡

⊢ ∀n∀P (𝔑[n,P] ⇒ ∃C (𝔈[n,C] & (C^I) ≡ P)) ¡

n,**P** ,! 1 (Prem) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**)) ,! 2 (∀E: P1) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 3 (()E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (𝔈[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**)) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀n∀P (𝔑[n,P] ⇒ ∃C (𝔈[n,C] & (C^I) ≡ P))
,! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **3.** ¡

⊢ ∀n∀P∀C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P ⇒ 𝔑[n,P]) ¡

n,**P**,**C** ,! 1 (Prem) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**)) ,! 2 (∀E: P1) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇔ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 3 (()E: 2) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ⇒ 𝔑[**n**,**P**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P** ,! 5 (Prem) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P**) ,! 6 (()I: 5) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 7 (∃I: 6) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P** ⇒ 𝔑[**n**,**P**] ,! 9 (⇒I: 5,8) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P** ⇒ 𝔑[**n**,**P**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀P∀C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P ⇒ 𝔑[n,P]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ ∀n∀P (𝔑[n,P] & 𝔑[0,P] ⇒ n = 0) ¡

n,**P** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**))
,! 5 (∀E: P2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 6 (()E: 5) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P**) ,! 8 (∃E: 7) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **P** ,! 9 (()E: 8) ¡

ℭ[**n**,**C**] ,! 10 (&E: 9) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[0,C] & (C^{I}) ≡ **P**))
,! 11 (∀E: P2) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[0,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 12 (()E: 11) ¡

∃C (ℭ[0,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 13 (⇒E: 4,12) ¡

(ℭ[0,**C**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ **P**) ,! 14 (∃E: 13) ¡

ℭ[0,**C**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ **P** ,! 15 (()E: 14) ¡

ℭ[0,**C**] ,! 16 (&E: 15) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ℭ[0,**C**] ,! 17 (&I: 10,16) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & ℭ[0,**C**] ⇒ **n** = 0) ,! 18 (∀E: C1.7) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ℭ[0,**C**] ⇒ **n** = 0 ,! 19 (()E: 18)

n = 0 ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ⇒ **n** = 0 ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ⇒ **n** = 0) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀P (𝔑[n,P] & 𝔑[0,P] ⇒ n = 0) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

□

! **5.** ¡

⊢ ∀n∀k∀P (ω[n] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[n,P] & 𝔑[k,P] ⇒ n = k) ¡

n,**k**,**P** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**k**,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 4 (&E: 2) ¡

𝔑[**k**,**P**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**)) ,! 6 (∀E: P2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 7 (()E: 6) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^I) ≡ **P**) ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ **P**) ,! 9 (∃E: 8) ¡

ℭ[**n**,**C**] & ($\mathbf{C}^I$) ≡ **P** ,! 10 (()E: 9) ¡

ℭ[**n**,**C**] ,! 11 (&E: 10) ¡

(**C**I) ≡ **P** ,! 12 (&E: 10) ¡

(𝔑[**k**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**k**,C] & (CI) ≡ **P**))
,! 13 (∀E: P2) ¡

𝔑[**k**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**k**,C] & (CI) ≡ **P**) ,! 14 (()E: 13) ¡

∃C (ℭ[**k**,C] & (CI) ≡ **P**) ,! 15 (⇒E: 5,14) ¡

(ℭ[**k**,**D**] & (**D**I) ≡ **P**) ,! 16 (∃E: 15) ¡

ℭ[**k**,**D**] & (**D**I) ≡ **P** ,! 17 (()E: 16) ¡

ℭ[**k**,**D**] ,! 18 (&E: 17) ¡

(**D**I) ≡ **P** ,! 19 (&E: 17) ¡

(**C**I) ≡ **P** & (**D**I) ≡ **P** ,! 20 (&I: 12,19) ¡

((**C**I) ≡ **P** & (**D**I) ≡ **P** ⇒ (**C**I) ≡ (**D**I))
,! 21 (∀E: II1.17) ¡

(**C**I) ≡ **P** & (**D**I) ≡ **P** ⇒ (**C**I) ≡ (**D**I) ,! 22 (()E: 21) ¡

(**C**I) ≡ (**D**I) ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] ,! 24 (&I: 3,11) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**]
,! 25 (&I: 18,24) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C**I) ≡ (**D**I)
,! 26 (&I: 23,25) ¡

(ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C**I) ≡ (**D**I)
⇒ **n** = **k**)
,! 27 (∀E: C1.19) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & ℭ[**n**,**C**] & ℭ[**k**,**D**] & (**C**I) ≡ (**D**I)
⇒ **n** = **k**
,! 28 (()E: 27) ¡

n = **k** ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**k**,**P**] ⇒ **n** = **k**
,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**k**]) & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**k**,**P**] ⇒ **n** = **k**)
,! 31 (()I: 30) ¡

∀n∀k∀P (ω[n] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[n,P] & 𝔑[k,P] ⇒ n = k)
! 32 (∀I: 1,31) ¡

□

! **6.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[0,P] ⇔ P ≡ φ) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[0,C] & (C^{I}) ≡ **P**))
,! 3 (∀E: P2) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[0,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃C (ℭ[0,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ℭ[0,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P**) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ℭ[0,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 7 (()E: 6) ¡

ℭ[0,**C**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** ,! 9 (&E: 7) ¡

(ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ) ,! 10 (∀E: C1.3) ¡

ℭ[0,**C**] ⇒ **C** ≣ Φ ,! 11 (()E: 10) ¡

C ≣ Φ ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

(**C** ≣ Φ ⇒ (**C**^{I}) ≡ φ) ,! 13 (∀E: III6.29) ¡

C ≣ Φ ⇒ (**C**^{I}) ≡ φ ,! 14 (()E: 13) ¡

(**C**^{I}) ≡ φ ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** & (**C**^{I}) ≡ φ ,! 16 (&I: 9,15) ¡

((**C**^{I}) ≡ **P** & (**C**^{I}) ≡ φ ⇒ **P** ≡ φ) ,! 17 (∀E: II1.19) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** & (**C**^{I}) ≡ φ ⇒ **P** ≡ φ ,! 18 (()E: 17) ¡

P ≡ φ ,! 19 (⇒E:: 16,18) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ φ ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

P ≡ φ ,! 21 (Prem) ¡

(Φ^{I}) ≡ φ ,! 22 (∀E: III6.28) ¡

(Φ^{I}) ≡ ϕ & **P** ≡ ϕ ,! 23 (&I: 21,22) ¡

((Φ^{I}) ≡ ϕ & **P** ≡ ϕ ⇒ (Φ^{I}) ≡ **P**) ,! 24 (∀E: II1.17) ¡

(Φ^{I}) ≡ ϕ & **P** ≡ ϕ ⇒ (Φ^{I}) ≡ **P** ,! 25 (()E: 24) ¡

(Φ^{I}) ≡ **P** ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

Φ ≣ Φ ,! 27 (∀E: III1.7) ¡

(Φ ≣ Φ ⇒ ℭ[0,Φ]) ,! 28 (∀E: C1.4) ¡

Φ ≣ Φ ⇒ ℭ[0,Φ] ,! 29 (()E: 28) ¡

ℭ[0,Φ] ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

ℭ[0,Φ] & (Φ^{I}) ≡ **P** ,! 31 (&I: 26,30) ¡

(ℭ[0,Φ] & (Φ^{I}) ≡ **P** ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 32 (∀E: P3) ¡

ℭ[0,Φ] & (Φ^{I}) ≡ **P** ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 33 (()E: 32) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 35 (⇒I: 21,34) ¡

𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ ,! 36 (⇔I: 20,35) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ) ,! 37 (()I: 36) ¡

∀P (𝔑[0,P] ⇔ P ≡ ϕ) ! 38 (∀I: 1,37) ¡

□

! **7.** ¡

⊢ ∀n∀m∀P∀Q∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)) & 𝔑[n,P]
⇒ 𝔑[m,Q]) ¡

n,**m**,**P**,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$)) & 𝔑[**n**,**P**]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 4 (&E: 2) ¡

Q ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$)) ,! 5 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 6 (&E: 2) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**))

,! 7 (∀E: P2) ¡

𝔑[n,P] ⇒ ∃C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 8 (()E: 7) ¡

∃C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 10 (∃E: 9) ¡

ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P ,! 11 (()E: 10) ¡

ℭ[n,C] ,! 12 (&E: 11) ¡

(C^{I}) ≡ P ,! 13 (&E: 11) ¡

¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ,! 14 (&I: 4,13) ¡

(¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ⇒ ¬ (C^{I})[a]) ,! 15 (∀E: II1.38) ¡

¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ⇒ ¬ (C^{I})[a] ,! 16 (()E: 15) ¡

¬ (C^{I})[a] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(C ⊔ (m ▪ a)) ≣ (C ⊔ (m ▪ a)) ,! 18 (∀E: III1.7) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] ,! 19 (&I: 3,17) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & (C ⊔ (m ▪ a)) ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
,! 20 (&I: 18,19) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a] & (C ⊔ (m ▪ a)) ≣ (C ⊔ (m ▪ a))
& ℭ[n,C]
,! 21 (&I: 12,20) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a]
& (C ⊔ (m ▪ a)) ≣ (C ⊔ (m ▪ a)) & ℭ[n,C]
⇒ ℭ[m,(C ⊔ (m ▪ a))])
,! 22 (∀E: C1.10) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (C^{I})[a]
& (C ⊔ (m ▪ a)) ≣ (C ⊔ (m ▪ a)) & ℭ[n,C]
⇒ ℭ[m,(C ⊔ (m ▪ a))]
,! 23 (()E: 22) ¡

ℭ[m,(C ⊔ (m ▪ a))] ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$) ,! 25 (∀E: III12.19)
¡

(C^{I}) ≡ P & ((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$) ,! 26 (&I: 13,25) ¡

((C^{I}) ≡ P & ((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$)
⇒ ((C ⊔ (m ▪ a))^{I}) ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)))

,! 27 (∀E: III6.26) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** & ((m ▪ **a**)^{I}) ≡ (**a**•)
⇒ ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**•))
,! 28 (()E: 27) ¡

((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•))
,! 30 (&I: 5,29) ¡

(((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•))
⇒ ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q**)
,! 31 (∀E: II1.17) ¡

((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•))
⇒ ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q**
,! 32 (()E: 31) ¡

((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q** ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

ℭ[m,(**C** ⊔ (m ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q**
,! 34 (&I: 24,33) ¡

(ℭ[m,(**C** ⊔ (m ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q** ⇒ 𝔑[m,**Q**])
,! 35 (∀E: P3) ¡

ℭ[m,(**C** ⊔ (m ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (m ▪ **a**))^{I}) ≡ **Q** ⇒ 𝔑[m,**Q**]
,! 36 (()E: 35) ¡

𝔑[m,**Q**] ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,m] & ¬ **P**[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ 𝔑[m,**Q**]
,! 38 (⇒I: 6,37) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,m] & ¬ **P**[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ 𝔑[m,**Q**])
,! 39 (()I: 38) ¡

∀n∀m∀P∀Q∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a•)) & 𝔑[n,P]
⇒ 𝔑[m,Q])
! 40 (∀I: 1,39) ¡

□

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀m∀P∀Q∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a•)) & 𝔑[m,Q]
⇒ 𝔑[n,P]) ¡

n,m,**P**,**Q**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,m] & ¬ **P**[**a**] & **Q** ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[m,**Q**]

	,! 2 (Prem) ¡
ω[**n**] & σ[**n**,**m**]	,! 3 (&E: 2) ¡
¬ **P**[**a**]	,! 4 (&E: 2) ¡
Q ≡ (**P** ∪ ($\mathbf{a}^{\bullet}$))	,! 5 (&E: 2) ¡
𝔑[**m**,**Q**]	,! 6 (Prem) ¡
(𝔑[**m**,**Q**] ⇒ ∃C (ℭ[**m**,C] & (C^{I}) ≡ **Q**))	,! 7 (∀E: P2) ¡
𝔑[**m**,**Q**] ⇒ ∃C (ℭ[**m**,C] & (C^{I}) ≡ **Q**)	,! 8 (()E: 7) ¡
∃C (ℭ[**m**,C] & (C^{I}) ≡ **Q**)	,! 9 (⇒E: 6,8) ¡
(ℭ[**m**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q**)	,! 10 (∃E: 9) ¡
ℭ[**m**,**C**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q**	,! 11 (()E: 10) ¡
ℭ[**m**,**C**]	,! 12 (&E: 11) ¡
($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q**	,! 13 (&E: 11) ¡
(**Q** ≡ (**P** ∪ ($\mathbf{a}^{\bullet}$)) ⇒ **Q**[**a**])	,! 14 (∀E: II8.34) ¡
Q ≡ (**P** ∪ ($\mathbf{a}^{\bullet}$)) ⇒ **Q**[**a**]	,! 15 (()E: 14) ¡
Q[**a**]	,! 16 (⇒E: 5,14) ¡
Q[**a**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q**	,! 17 (&I: 13,16) ¡
(**Q**[**a**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q** ⇒ ∃x **C**[x,**a**])	,! 18 (∀E: III6.11) ¡
Q[**a**] & ($\mathbf{C}^{I}$) ≡ **Q** ⇒ ∃x **C**[x,**a**]	,! 19 (()E: 18) ¡
∃x **C**[x,**a**]	,! 20 (⇒E: 17,19) ¡
C[**x**,**a**]	,! 21 (∃E: 20) ¡
ℭ[**m**,**C**] & **C**[**x**,**a**]	,! 22 (&I: 12,21) ¡
(ℭ[**m**,**C**] & **C**[**x**,**a**] ⇒ ¬ **m** = 0)	,! 23 (∀E: C1.6) ¡
ℭ[**m**,**C**] & **C**[**x**,**a**] ⇒ ¬ **m** = 0	,! 24 (()E: 23) ¡
¬ **m** = 0	,! 25 (⇒E: 22,24) ¡
ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0	,! 26 (&I: 12,25) ¡
ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0	,! 27 (&I: 3,26) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0
⇒ ∃a (C[**m**,a] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a]))
,! 28 (∀E: C1.14) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ℭ[**m**,**C**] & ¬ **m** = 0
⇒ ∃a (**C**[**m**,a] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a])
,! 29 (()E: 28) ¡

∃a (**C**[**m**,a] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** a)] & ¬ ((**C** ι **m** a)^{I})[a])
,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

(**C**[m,**b**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)] & ¬ ((**C** ι **m** **b**)^{I})[**b**])
,! 31 (∃E: 30) ¡

C[m,**b**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)] & ¬ ((**C** ι **m** **b**)^{I})[**b**]
,! 32 (()E: 31) ¡

ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)] ,! 33 (&E: 32) ¡

! Unfortunately, (**C** ι **m** **b**) is missing **b** from its image, and we need a predicate numbering **n** which is missing **a**. We therefore consider ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**). ¡

! To show: ℭ[**n**,((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)] ¡

ω[**n**] ,! 34 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)] ,! 35 (&I: 33,34) ¡

((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)
,! 36 (∀E: III1.7) ¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)]
& ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)
,! 37 (&I: 35,36) ¡

(ω[**n**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)]
& ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)
⇒ ℭ[**n**,((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)])
,! 38 (∀E: C1.16) ¡

ω[**n**] & ℭ[**n**,(**C** ι **m** **b**)]
& ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**) ≣ ((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)
⇒ ℭ[**n**,((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)]
,! 39 (()E: 38) ¡

ℭ[**n**,((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)] ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

! To show: (((**C** ι **m** **b**) α **a** **b**)^{I}) ≡ **P** ¡

((C ι m b) α a b) ≣ ((C α a b) ι m a)
,! 41 (∀E: III15.45) ¡

(((C ι m b) α a b) ≣ ((C α a b) ι m a)
⇒ (((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ (((C α a b) ι m a)^{I}))
,! 42 (∀E: III6.22) ¡

((C ι m b) α a b) ≣ ((C α a b) ι m a)
⇒ (((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ (((C α a b) ι m a)^{I})
,! 43 (()E: 42) ¡

(((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ (((C α a b) ι m a)^{I})
,! 44 (⇒E: 41,43) ¡

((C α a b) ι m a) ⫅ ((C ι m b) α a b)
,! 45 (∀E: III15.44) ¡

¬ ((C ι m b)^{I})[b] ,! 46 (&E: 32) ¡

(¬ ((C ι m b)^{I})[b] ⇒ ¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a])
,! 47 (∀E: III15.36) ¡

¬ ((C ι m b)^{I})[b] ⇒ ¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a]
,! 48 (()E: 47) ¡

¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a] ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

((C α a b) ι m a) ⫅ ((C ι m b) α a b)
& ¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a] ,! 50 (&I: 45,49) ¡

(((C α a b) ι m a) ⫅ ((C ι m b) α a b)
& ¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a]
⇒ ¬ (((C α a b) ι m a)^{I})[a])
,! 51 (∀E: III6.21) ¡

((C α a b) ι m a) ⫅ ((C ι m b) α a b)
& ¬ (((C ι m b) α a b)^{I})[a]
⇒ ¬ (((C α a b) ι m a)^{I})[a]
,! 52 (()E: 51) ¡

¬ (((C α a b) ι m a)^{I})[a] ,! 53 (⇒E: 50,52) ¡

(¬ (((C α a b) ι m a)^{I})[a]
⇒ (((C α a b) ι m a)^{I}) ≡ ((C^{I}) \ (a•)))
,! 54 (∀E: III14.14) ¡

¬ (((C α a b) ι m a)^{I})[a]

$\Rightarrow (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 55 (()E: 54) ¡

$(((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 56 (⇒E: 53,55) ¡

$(((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I})$
$\&\ (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 57 (&I: 44,56) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 58 (&I: 4,5) ¡

$(\ \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$
,! 59 (∀E: II8.61) ¡

$\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 60 (()E: 59) ¡

$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 61 (⇒E: 58,60) ¡

$(\mathbf{C}^{I}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 62 (&I: 13,61) ¡

$(\ (\mathbf{C}^{I}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))\ )$
,! 63 (∀E: II7.47) ¡

$(\mathbf{C}^{I}) \equiv \mathbf{Q}\ \&\ \mathbf{P} \equiv (\mathbf{Q} \setminus (\mathbf{a}^{\bullet})) \Rightarrow \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 64 (()E: 63) ¡

$\mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$,! 65 (⇒E: 62,64) ¡

$(((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I})$
$\&\ (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\&\ \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
,! 66 (&I: 57,65) ¡

$(\ (((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I})$
$\quad \&\ (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\quad \&\ \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\quad \Rightarrow (((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv \mathbf{P}\ )$
,! 67 (∀E: II1.22) ¡

$(((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I})$
$\&\ (((\mathbf{C}\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{a})^{I}) \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\&\ \mathbf{P} \equiv ((\mathbf{C}^{I}) \setminus (\mathbf{a}^{\bullet}))$
$\Rightarrow (((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv \mathbf{P}$
,! 68 (()E: 67) ¡

$(((\mathbf{C}\ \iota\ \mathbf{m}\ \mathbf{b})\ \alpha\ \mathbf{a}\ \mathbf{b})^{I}) \equiv \mathbf{P}$,! 69 (⇒E: 66,68) ¡

! Conclusion. ¡

ℭ[n,((C ι m b) α a b)] & (((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ P
,! 70 (&I: 40,69) ¡

(ℭ[n,((C ι m b) α a b)] & (((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ P
⇒ 𝔑[n,P])
,! 71 (∀E: P3) ¡

ℭ[n,((C ι m b) α a b)] & (((C ι m b) α a b)^{I}) ≡ P
⇒ 𝔑[n,P]
,! 72 (()E: 71) ¡

𝔑[n,P] ,! 73 (⇒E: 70,72) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)) & 𝔑[m,Q] ⇒ 𝔑[n,P]
,! 74 (⇒I: 2,73) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)) & 𝔑[m,Q] ⇒ 𝔑[n,P])
,! 75 (()I: 74) ¡

∀n∀m∀P∀Q∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & Q ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)) & 𝔑[m,Q]
⇒ 𝔑[n,P])
! 76 (∀I: 1,75) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀P∀a∀n (ω[n] & 𝔑[n,P] & ¬ P[a]
⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(P ∪ (a$^{\bullet}$))])) ¡

P,a,n ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & 𝔑[n,P] & ¬ P[a] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[n,P] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ P[a] ,! 5 (&E: 2) ¡

(𝔑[n,P] ⇒ ∃C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P))
,! 6 (∀E: P2) ¡

𝔑[n,P] ⇒ ∃C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 7 (()E: 6) ¡

∃C (ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

(ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P) ,! 9 (∃E: 8) ¡

ℭ[n,C] & (C^{I}) ≡ P ,! 10 (()E: 9) ¡

ℭ[n,C] ,! 11 (&E: 10) ¡

(C^{I}) ≡ P ,! 12 (&E: 10) ¡

¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ,! 13 (&I: 5,12) ¡

(¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ⇒ ¬ (C^{I})[a]) ,! 14 (∀E: II1.38) ¡

¬ P[a] & (C^{I}) ≡ P ⇒ ¬ (C^{I})[a] ,! 15 (()E: 14) ¡

¬ (C^{I})[a] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(¬ (C^{I})[a] ⇒ ¬ ∃x C[x,a]) ,! 17 (∀E: III6.6) ¡

¬ (C^{I})[a] ⇒ ¬ ∃x C[x,a] ,! 18 (()E: 17) ¡

¬ ∃x C[x,a] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

ω[n] & ℧[n,C] ,! 20 (&I: 3,11) ¡

ω[n] & ℧[n,C] & ¬ ∃x C[x,a] ,! 21 (&I: 19,20) ¡

(ω[n] & ℧[n,C] & ¬ ∃x C[x,a]
⇒ ∃m (ω[m] & ℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))]))
,! 22 (∀E: C1.18) ¡

ω[n] & ℧[n,C] & ¬ ∃x C[x,a]
⇒ ∃m (ω[m] & ℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))])
,! 23 (()E: 22) ¡

∃m (ω[m] & ℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))]) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

(ω[m] & ℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))]) ,! 25 (∃E: 24) ¡

ω[m] & ℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))] ,! 26 (()E: 25) ¡

ω[m] ,! 27 (&E: 26) ¡

℧[m,(C ⊔ (m ▪ a))] ,! 28 (&E: 26) ¡

((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$) ,! 29 (∀E: III12.19)
¡

(C^{I}) ≡ P & ((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$) ,! 30 (&I: 12,29)
¡

((C^{I}) ≡ P & ((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$)
⇒ ((C ⊔ (m ▪ a))^{I}) ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$)))
,! 31 (∀E: III6.26) ¡

(C^{I}) ≡ P & ((m ▪ a)^{I}) ≡ (a$^{\bullet}$)
⇒ ((C ⊔ (m ▪ a))^{I}) ≡ (P ∪ (a$^{\bullet}$))
,! 32 (()E: 31) ¡

((**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$)) ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

ℭ[**m**,(**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))
,! 34 (&I: 28,33) ¡

(ℭ[**m**,(**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))
⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))])
,! 35 (∀E: P3) ¡

ℭ[**m**,(**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))] & ((**C** ⊔ (**m** ▪ **a**))^{I}) ≡ (**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))
⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))]
,! 36 (()E: 35) ¡

𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))] ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))] ,! 38 (&I: 27,37) ¡

(ω[**m**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))]) ,! 39 (()I: 38) ¡

∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))]) ,! 40 (∃I: 39) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))])
,! 41 (⇒I: 2,40) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**$^{\bullet}$))]))
,! 42 (()I: 2,41) ¡

∀P∀a∀n (ω[n] & 𝔑[n,P] & ¬ P[a]
⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(P ∪ (a$^{\bullet}$))]))
! 43 (∀I: 1,42) ¡

□

! The next couple of propositions (P10 and P11) are simple consequences of the number axioms. ¡

! **10.** P10 is a slightly weaker version of the conjunction of P4 and P5 (although note that in addition it relies on Induction because of its appeal to C1.15). ¡

⊢ ∀n∀m∀P (ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,P] ⇒ n = m) ¡

n,**m**,**P** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(**m** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 4 (∀E: I3.4) ¡

m = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

m = 0 ,! 6 (Prem) ¡

ℕ[**n**,**P**] & ℕ[0,**P**] ,! 7 (=E: 3,6) ¡

(ℕ[**n**,**P**] & ℕ[0,**P**] ⇒ **n** = 0) ,! 8 (∀E: P4) ¡

ℕ[**n**,**P**] & ℕ[0,**P**] ⇒ **n** = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

n = 0 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

n = **m** ,! 11 (=E: 6,10) ¡

m = 0 ⇒ **n** = 0 ,! 12 (⇒I: 6,11) ¡

¬ **m** = 0 ,! 13 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 14 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**] ,! 15 (&I: 3,14) ¡

ω[**m**] ,! 16 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 17 (&I: 13,16) ¡

(ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]))
,! 18 (∀E: C1.15) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 19 (()E: 18) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**]
,! 21 (&I: 15,20) ¡

(ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**] ⇒ **n** = **m**)
,! 22 (∀E: P5) ¡

ω[**n**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**] ⇒ **n** = **m**
,! 23 (()E: 22) ¡

n = **m** ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 25 (⇒I: 13,24) ¡

n = **m** ,! 25 (∨E: 5,12,25) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**] ⇒ **n** = **m**
,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**m**,**P**] ⇒ **n** = **m**)
,! 27 (()I: 26) ¡

∀n∀m∀P (ω[n] & ω[m] & ℕ[n,P] & ℕ[m,P] ⇒ n = m)
! 28 (∀I: 1,27) ¡

▯

! **11.** P11 is a corollary of P8. Subsequently, only P11 will be used, and there will be no further appeals to P8. ¡

⊢ ∀n∀m∀P∀a (ω[n] & σ[n,m] & P[a] & 𝔑[m,P] ⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))])
¡

n,m,P,a ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] & P[a] & 𝔑[m,P] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

P[a] ,! 4 (&E: 2) ¡

𝔑[m,P] ,! 5 (&E: 2) ¡

¬ (P \ (a•))[a] ,! 6 (∀E: II8.47) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (P \ (a•))[a] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(P[a] ⇒ P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•))) ,! 8 (∀E: II8.57) ¡

P[a] ⇒ P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ,! 9 (()E: 8) ¡

P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•)) ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (P \ (a•))[a] & P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•))
,! 11 (&I: 9,10) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (P \ (a•))[a] & P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•))
& 𝔑[m,P]
,! 12 (&I: 5,11) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ¬ (P \ (a•))[a] & P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•))
& 𝔑[m,P]
⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))])
,! 13 (∀E: P8) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ (P \ (a•))[a] & P ≡ ((P \ (a•)) ∪ (a•))
& 𝔑[m,P]
⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))]
,! 14 (()E: 13) ¡

𝔑[n,(P \ (a•))] ,! 15 (⇒E: 14) ¡

ω[n] & σ[n,m] & P[a] & 𝔑[m,P] ⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))]
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & P[a] & 𝔑[m,P] ⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))])
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀P∀a (ω[n] & σ[n,m] & P[a] & 𝔑[m,P] ⇒ 𝔑[n,(P \ (a•))])

! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **12.** P12 is a corollary of P7. Unlike P8 and P11, P7 will still be used. ¡

⊦ ∀n∀m∀P∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P]
⇒ 𝔑[m,(P ∪ (a•))]) ¡

n,**m**,**P**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 3 (∀E: II1.9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[**n**,**P**]
,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[**n**,**P**]
⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 5 (∀E: P7) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & (**P** ∪ (**a**•)) ≡ (**P** ∪ (**a**•)) & 𝔑[**n**,**P**]
⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀P∀a (ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ⇒ 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **13.** P13 relies on the counting rather than the numbering axioms, so it will not be used subsequently in keeping with our stated aim of appealing only to the latter after this chapter. A weaker version of P13, which talks only of predicates of finite number, will be asserted in the fourth chapter of this section. Relying on the numbering axioms, it will suffice for our purposes. ¡

⊦ ∀n∀P∀Q (𝔑[n,P] & P ≡ Q ⇒ 𝔑[n,Q]) ¡

n,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **P** ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

P ≡ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

(𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**))
,! 5 (∀E: P2) ¡

𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 6 (()E: 5) ¡

∃C (ℭ[**n**,C] & (C^{I}) ≡ **P**) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P**) ,! 8 (∃E: 7) ¡

ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **P** ,! 9 (()E: 8) ¡

ℭ[**n**,**C**] ,! 10 (&E: 9) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** ,! 11 (&E: 9) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** & **P** ≡ **Q** ,! 12 (&I: 4,11) ¡

((**C**^{I}) ≡ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ (**C**^{I}) ≡ **Q**) ,! 13 (∀E: II1.15) ¡

(**C**^{I}) ≡ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ (**C**^{I}) ≡ **Q** ,! 14 (()E: 13) ¡

(**C**^{I}) ≡ **Q** ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **Q** ,! 16 (&I: 10,15) ¡

(ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **Q** ⇒ 𝔑[**n**,**Q**]) ,! 17 (∀E: P3) ¡

ℭ[**n**,**C**] & (**C**^{I}) ≡ **Q** ⇒ 𝔑[**n**,**Q**] ,! 18 (()E: 17) ¡

𝔑[**n**,**Q**] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **P** ≡ **Q** ⇒ 𝔑[**n**,**Q**] ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & **P** ≡ **Q** ⇒ 𝔑[**n**,**Q**]) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀n∀P∀Q (𝔑[n,P] & P ≡ Q ⇒ 𝔑[n,Q]) ! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯