!CHAPTER 3

THE NUMBER 0¡

! This chapter states and proves some elementary propositions about 0: about predicates numbering or not numbering 0. P1 and P2 appeal to C2.6, and afterwards P3 through P15 appeal, directly or indirectly, to P1 and P2. That is, P1 through P15 are independent of all non-logical axioms other than C2.6. P16 through P18 rely on C2.4 as well as C2.6. ¡

! **1.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[0,P] ⇒ P ≡ ϕ) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ) ,! 2 (∀E: C2.6) ¡

𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ ,! 3 (()E: 2) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P (𝔑[0,P] ⇒ P ≡ ϕ) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **2.** ¡

⊢ ∀P (P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,P]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ) ,! 2 (∀E: C2.6) ¡

𝔑[0,**P**] ⇔ **P** ≡ ϕ ,! 3 (()E: 2) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 5 (()I: 4) ¡

∀P (P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,P]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **3.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[0,P] ⇒ ∀x ¬ P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P1) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 6 (∀E: II5.5) ¡

P ≡ ϕ ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 10 (()E: 9) ¡

∀P (𝔑[0,P] ⇒ ∀x ¬ P[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **4.** ¡

⊢ ∀P (∀x ¬ P[x] ⇒ 𝔑[0,P]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: II5.17) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 6 (∀E: P2) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 7 (()E: 6) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 10 (()E: 9) ¡

∀P (∀x ¬ P[x] ⇒ 𝔑[0,P]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **5.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[0,P] ⇒ ¬ ∃x P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P1) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ φ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ φ ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 6 (∀E: II5.6) ¡

P ≡ φ ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ ¬ ∃x **P**[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ ¬ ∃x **P**[x]) ,! 10 (()E: 9) ¡

∀P (𝔑[0,P] ⇒ ¬ ∃x P[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **6.** ¡

⊢ ∀P (¬ ∃x P[x] ⇒ 𝔑[0,P]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ φ) ,! 3 (∀E: II5.15) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ **P** ≡ φ ,! 4 (()E: 3) ¡

P ≡ φ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ≡ φ ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 6 (∀E: P2) ¡

P ≡ φ ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 7 (()E: 6) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 10 (()E: 9) ¡

∀P (¬ ∃x P[x] ⇒ 𝔑[0,P]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **7.** ¡

⊢ ∀P (¬ P ≡ φ ⇒ ¬ 𝔑[0,P]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

¬ **P** ≡ φ ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 3 (Prem) ¡

$(\mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi)$,! 4 ($\forall$E: P1) ¡

$\mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \mathbf{P} \equiv \phi$,! 5 (()E: 4) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi$,! 6 ($\Rightarrow$E: 3,5) ¡

$\mathfrak{F}$,! 7 ($\mathfrak{F}$I: 2,6) ¡

$\mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \mathfrak{F}$,! 8 ($\Rightarrow$I: 3,7) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 9 ($\neg$I: 8) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 10 ($\Rightarrow$I: 2,9) ¡

$(\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}])$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall P\ (\neg\ P \equiv \phi \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,P])$! 12 ($\forall$I: 1,11) ¡

▯

! **8.** ¡

$\vdash \forall P\ (\neg\ \mathfrak{N}[0,P] \Rightarrow \neg\ P \equiv \phi)$ ¡

$\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 2 (Prem) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi$,! 3 (Prem) ¡

$(\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}])$,! 4 ($\forall$E: P2) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 5 (()E: 4) ¡

$\mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 6 ($\Rightarrow$E: 3,5) ¡

$\mathfrak{F}$,! 7 ($\mathfrak{F}$I: 2,6) ¡

$\mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \mathfrak{F}$,! 8 ($\Rightarrow$I: 3,7) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 9 ($\neg$I: 8) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 10 ($\Rightarrow$I: 2,9) ¡

$(\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi)$,! 11 (()I: 10) ¡

$\forall P\ (\neg\ \mathfrak{N}[0,P] \Rightarrow \neg\ P \equiv \phi)$! 12 ($\forall$I: 1,11) ¡

▯

! **9.** ¡

$\vdash \forall P\ (\exists x\ P[x] \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,P])$ ¡

$\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$\exists x\ \mathbf{P}[x]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \exists x\ \mathbf{P}[x] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi\ )$,! 3 ($\forall$E: II5.7) ¡

$\exists x\ \mathbf{P}[x] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]\ )$,! 6 ($\forall$E: P7) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 7 (()E: 6) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\exists x\ \mathbf{P}[x] \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\ \exists x\ \mathbf{P}[x] \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]\ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P\ (\ \exists x\ P[x] \Rightarrow \neg\ \mathfrak{N}[0,P]\ )$! 11 ($\forall$I: 1,10) ¡

▯

! **10.** ¡

$\vdash \forall P\ (\ \neg\ \mathfrak{N}[0,P] \Rightarrow \exists x\ P[x]\ )$ ¡

$\mathbf{P}$,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}]$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi\ )$,! 3 ($\forall$E: P8) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi$,! 5 ($\Rightarrow$E: 2,4) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x]\ )$,! 6 ($\forall$E: II5.16) ¡

$\neg\ \mathbf{P} \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x]$,! 7 (()E: 6) ¡

$\exists x\ \mathbf{P}[x]$,! 8 ($\Rightarrow$E: 5,7) ¡

$\neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x]$,! 9 ($\Rightarrow$I: 2,8) ¡

$(\ \neg\ \mathfrak{N}[0,\mathbf{P}] \Rightarrow \exists x\ \mathbf{P}[x]\ )$,! 10 (()I: 9) ¡

$\forall P\ (\ \neg\ \mathfrak{N}[0,P] \Rightarrow \exists x\ P[x]\ )$! 11 ($\forall$I: 1,10) ¡

▯

! **11.** ¡

$\vdash \forall P \forall n\ (\ \mathfrak{N}[n,P]\ \&\ \neg\ P \equiv \phi \Rightarrow \neg\ n = 0\ )$ ¡

$\mathbf{P},\mathbf{n}$,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 4 (&E: 2) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 6 (=E: 3,5) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ) ,! 7 (∀E: P1) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ **P** ≡ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

P ≡ ϕ ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 4,9) ¡

n = 0 ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒E: 5,10) ¡

¬ **n** = 0 ,! 12 (¬I: 11) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀P∀n (𝔑[n,P] & ¬ P ≡ ϕ ⇒ ¬ n = 0) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀P∀n (𝔑[n,P] & ∃x P[x] ⇒ ¬ n = 0) ¡

P,**n** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

∃x **P**[x] ,! 4 (&E: 2) ¡

(∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ) ,! 5 (∀E: II5.7) ¡

∃x **P**[x] ⇒ ¬ **P** ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 9 (∀E: P11) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **n** = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀n (𝔑[n,P] & ∃x P[x] ⇒ ¬ n = 0) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[0,P] ∨ ∃x P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ∨ ¬ **P** ≡ ϕ) ,! 2 (∀E: II1.48) ¡

P ≡ ϕ ∨ ¬ **P** ≡ ϕ ,! 3 (()E: 2) ¡

P ≡ ϕ ,! 4 (Prem) ¡

(**P** ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 5 (∀E: P2) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x] ,! 8 (∨I: 7) ¡

P ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x] ,! 9 (⇒I: 4,8) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ,! 10 (Prem) ¡

(¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ∃x **P**[x]) ,! 11 (∀E: II5.16) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ⇒ ∃x **P**[x] ,! 12 (()E: 11) ¡

∃x **P**[x] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x] ,! 14 (∨I: 13) ¡

¬ **P** ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x] ,! 15 (⇒I: 10,14) ¡

𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x] ,! 16 (∨E: 3,9,15) ¡

(𝔑[0,**P**] ∨ ∃x **P**[x]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀P (𝔑[0,P] ∨ ∃x P[x]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **14.** ¡

⊢ 𝔑[0,ϕ] ¡

```
( ∀x ¬ ϕ[x] ⇒ 𝔑[0,ϕ] )                    ,! 1 (∀E: P4)          ¡
∀x ¬ ϕ[x] ⇒ 𝔑[0,ϕ]                        ,! 2 (()E: 1)          ¡
𝔑[0,ϕ]                                     ! 3 (⇒E: II5.3,2)     ¡
▯
! 15.                                                             ¡
⊢ ∀P∀Q ( 𝔑[0,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ 𝔑[0,Q]) )                             ¡
  P,Q                                      ,! 1 (Prem)            ¡
    𝔑[0,P]                                 ,! 2 (Prem)            ¡
    ( 𝔑[0,P] ⇒ P ≡ ϕ )                     ,! 3 (∀E: P1)          ¡
    𝔑[0,P] ⇒ P ≡ ϕ                         ,! 4 (()E: 3)          ¡
    P ≡ ϕ                                  ,! 5 (⇒E: 2,4)         ¡
      P ~ Q                                ,! 6 (Prem)            ¡
      P ~ Q & P ≡ ϕ                        ,! 7 (&I: 5,6)         ¡
      ( P ~ Q & P ≡ ϕ ⇒ Q ≡ ϕ )            ,! 8 (∀E: III13.21)    ¡
      P ~ Q & P ≡ ϕ ⇒ Q ≡ ϕ                ,! 9 (()E: 8)          ¡
      Q ≡ ϕ                                ,! 10 (⇒E: 7,9)        ¡
      ( Q ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,Q] )                   ,! 11 (∀E: P2)         ¡
      Q ≡ ϕ ⇒ 𝔑[0,Q]                       ,! 12 (()E: 11)        ¡
      𝔑[0,Q]                               ,! 13 (⇒E: 10,12)      ¡
    P ~ Q ⇒ 𝔑[0,Q]                         ,! 14 (⇒I: 6,13)       ¡
      𝔑[0,Q]                               ,! 15 (Prem)           ¡
      ( 𝔑[0,Q] ⇒ Q ≡ ϕ )                   ,! 16 (∀E: P1)         ¡
      𝔑[0,Q] ⇒ Q ≡ ϕ                       ,! 17 (()E: 16)        ¡
      Q ≡ ϕ                                ,! 18 (⇒E: 15,17)      ¡
      P ≡ ϕ & Q ≡ ϕ                        ,! 19 (&I: 5,18)       ¡
      ( P ≡ ϕ & Q ≡ ϕ ⇒ P ≡ Q )            ,! 20 (∀E: II1.17)     ¡
      P ≡ ϕ & Q ≡ ϕ ⇒ P ≡ Q                ,! 21 (()E: 20)        ¡
      P ≡ Q                                ,! 22 (⇒E: 19,21)      ¡
```

(**P** ≡ **Q** ⇒ **P** ~ **Q**) ,! 23 (∀E: III13.2) ¡

P ≡ **Q** ⇒ **P** ~ **Q** ,! 24 (()E: 23) ¡

P ~ **Q** ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

𝔑[0,**Q**] ⇒ **P** ~ **Q** ,! 26 (⇒I: 15,25) ¡

P ~ **Q** ⇔ 𝔑[0,**Q**] ,! 27 (⇔I: 14,26) ¡

(**P** ~ **Q** ⇔ 𝔑[0,**Q**]) ,! 28 (()I: 27) ¡

𝔑[0,**P**] ⇒ (**P** ~ **Q** ⇔ 𝔑[0,**Q**]) ,! 29 (⇒I: 2,28) ¡

(𝔑[0,**P**] ⇒ (**P** ~ **Q** ⇔ 𝔑[0,**Q**])) ,! 30 (()I: 29) ¡

∀P∀Q (𝔑[0,P] ⇒ (P ~ Q ⇔ 𝔑[0,Q])) ! 31 (∀I: 1,30) ¡

□

! **16.** ¡

⊢ ∀P∀n (𝔑[n,P] & ∀x ¬ P[x] ⇒ n = 0) ¡

P,**n** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 4 (&E: 2) ¡

(∀x ¬ **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

∀x ¬ **P**[x] ⇒ 𝔑[0,**P**] ,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[0,**P**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ⇒ **n** = 0) ,! 9 (∀E: C2.4) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[0,**P**] ⇒ **n** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

n = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ⇒ **n** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ⇒ **n** = 0) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀n (𝔑[n,P] & ∀x ¬ P[x] ⇒ n = 0) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **17.** ¡

⊢ ∀P∀n (𝔑[n,P] & ¬ n = 0 ⇒ ∃x P[x]) ¡

P,**n** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ ∃x **P**[x] ,! 5 (Prem) ¡

(¬ ∃x **P**[x] ⇒ ∀x ¬ **P**[x]) ,! 6 (∀E: I3.24) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ ∀x ¬ **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∀x ¬ **P**[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ⇒ **n** = 0) ,! 10 (∀E: P16) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∀x ¬ **P**[x] ⇒ **n** = 0 ,! 11 (()E: 10) ¡

n = 0 ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

𝔉 ,! 13 (𝔉I: 4,12) ¡

¬ ∃x **P**[x] ⇒ 𝔉 ,! 14 (⇒E: 5,13) ¡

¬¬ ∃x **P**[x] ,! 15 (¬I: 14) ¡

∃x **P**[x] ,! 16 (¬E: 15) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x] ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀P∀n (𝔑[n,P] & ¬ n = 0 ⇒ ∃x P[x]) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **18.** ¡

⊢ ∀P∀Q∀n (𝔑[n,P] & 𝔑[n,Q] & ∃x P[x] ⇒ ∃x Q[x]) ¡

P,**Q**,**n** ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**n**,**Q**] & ∃x **P**[x] ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**Q**] ,! 4 (&E: 2) ¡

∃x **P**[x] ,! 5 (&E: 2) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 7 (∀E: P12) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ∃x **P**[x] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ **n** = 0 ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔑[**n**,**Q**] & ¬ **n** = 0 ,! 10 (&I: 4,9) ¡

(𝔑[**n**,**Q**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **Q**[x]) ,! 11 (∀E: P17) ¡

𝔑[**n**,**Q**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **Q**[x] ,! 12 (()E: 11) ¡

∃x **Q**[x] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**n**,**Q**] & ∃x **P**[x] ⇒ ∃x **Q**[x] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**n**,**Q**] & ∃x **P**[x] ⇒ ∃x **Q**[x])
,! 15 (()I: 14) ¡

∀P∀Q∀n (𝔑[n,P] & 𝔑[n,Q] & ∃x P[x] ⇒ ∃x Q[x])
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□