CHAPTER 6

INFINITE PREDICATES

This chapter introduces the concept of infiniteness. Among the propositions of interest:
* predicates which correspond (P6 and P7) or are equivalent to (P8 and P9) infinite predicates are themselves infinite;
* predicates which include infinite predicates are infinite (P11);
* the difference of an infinite and a finite predicate (in that order) is infinite (P12);
* an infinite predicate contains predicates having any finite number (P15); and
* potential infinity implies actual infinity (P17).

1. $\imath$ represents infiniteness.

$\$\ \imath\ ;\ \imath\ \mathbf{P}\ ;\ \neg\ f\ \mathbf{P}$

2.

$\vdash \forall P\ (\ f\ P \Rightarrow \neg\ \imath\ P\ )$

P	,! 1 (Prem)
f **P**	,! 2 (Prem)
$\imath$ **P**	,! 3 (Prem)
$\neg\ f$ **P**	,! 4 ($E: P1,3)
$\mathfrak{F}$	,! 5 ($\mathfrak{F}$I: 2,4)
$\imath$ **P** $\Rightarrow\ \mathfrak{F}$	,! 6 ($\Rightarrow$I: 3,5)
$\neg\ \imath$ **P**	,! 7 ($\neg$I: 6)
f **P** $\Rightarrow\ \neg\ \imath$ **P**	,! 8 ($\Rightarrow$I: 2,7)
(f **P** $\Rightarrow\ \neg\ \imath$ **P**)	,! 9 (()I: 8)
$\forall P\ (\ f\ P \Rightarrow \neg\ \imath\ P\ )$	,! 10 ($\forall$I: 1,9)

□

3.

$\vdash \forall P\ (\ \neg\ \imath\ P \Rightarrow f\ P\ )$

P	,! 1 (Prem)
$\neg\ \imath$ **P**	,! 2 (Prem)
$\neg\ f$ **P**	,! 3 (Prem)
$\imath$ **P**	,! 4 ($\$$I: P1,3)
$\mathfrak{F}$	,! 5 ($\mathfrak{F}$I: 2,4)

```
    ¬ 𝑓 P ⇒ ℱ                          ,! 6 (⇒I: 3,5)     ¡
    ¬¬ 𝑓 P                             ,! 7 (¬I: 6)       ¡
    𝑓 P                                ,! 8 (¬E: 7)       ¡
  ¬ ι P ⇒ 𝑓 P                          ,! 9 (⇒I: 2,8)     ¡
  ( ¬ ι P ⇒ 𝑓 P )                      ,! 10 (()I: 9)     ¡
∀P ( ¬ ι P ⇒ 𝑓 P )                      ! 11 (∀I: 1,10)    ¡
□

! 4.                                                       ¡
⊢ ∀n∀P ( ι P ⇒ ¬ (ω[n] & ℕ[n,P]) )                        ¡
  n,P                                ,! 1 (Prem)        ¡
    ι P                              ,! 2 (Prem)        ¡
    ¬ 𝑓 P                            ,! 3 (𝕊E: P1,2)    ¡
      (ω[n] & ℕ[n,P])                ,! 4 (Prem)        ¡
      ω[n] & ℕ[n,P]                  ,! 5 (()E: 4)      ¡
      ( ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ 𝑓 P )        ,! 6 (∀E: C5.2)    ¡
      ω[n] & ℕ[n,P] ⇒ 𝑓 P            ,! 7 (()E: 6)      ¡
      𝑓 P                            ,! 8 (⇒E: 5,7)     ¡
      ℱ                              ,! 9 (ℱI: 3,8)     ¡
    (ω[n] & ℕ[n,P]) ⇒ ℱ              ,! 10 (⇒I: 4,9)    ¡
    ¬ (ω[n] & ℕ[n,P])                ,! 11 (¬I: 10)     ¡
  ι P ⇒ ¬ (ω[n] & ℕ[n,P])            ,! 12 (⇒I: 2,11)   ¡
  ( ι P ⇒ ¬ (ω[n] & ℕ[n,P]) )        ,! 13 (()I: 12)    ¡
∀n∀P ( ι P ⇒ ¬ (ω[n] & ℕ[n,P]) )        ! 14 (∀I: 1,13)   ¡
□

! 5.                                                       ¡
⊢ ∀P ( ¬ ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] ) ⇒ ι P )                      ¡
  P                                  ,! 1 (Prem)        ¡
    ¬ ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] )           ,! 2 (Prem)        ¡
```

```
    f P                                  ,! 3 (Prem)          ¡
    ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] )                 ,! 4 (∃E: C5.1,3)    ¡
    ℱ                                    ,! 5 (ℱI: 2,4)       ¡
  f P ⇒ ℱ                                ,! 6 (⇒I: 3,5)       ¡
  ¬ f P                                  ,! 7 (¬I: 6)         ¡
  ι P                                    ,! 8 (∃I: P1,7)      ¡
¬ ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] ) ⇒ ι P             ,! 9 (⇒I: 2,8)       ¡
( ¬ ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] ) ⇒ ι P )         ,! 10 (()I: 9)       ¡
∀P ( ¬ ∃n ( ω[n] & ℕ[n,P] ) ⇒ ι P )       ! 11 (∀I: 1,10)     ¡
□
! P6 and P7 assert that predicates correspondending to infinite
predicates are themselves infinite.                            ¡
! 6.                                                           ¡
⊢ ∀P∀Q ( ι P & P ~ Q ⇒ ι Q )                                   ¡
  P,Q                                  ,! 1 (Prem)          ¡
    ι P & P ~ Q                        ,! 2 (Prem)          ¡
    ι P                                ,! 3 (&E: 2)         ¡
      f Q                              ,! 4 (Prem)          ¡
      P ~ Q                            ,! 5 (Prem)          ¡
      f Q & P ~ Q                      ,! 6 (&I: 4,5)       ¡
      ( f Q & P ~ Q ⇒ f P )             ,! 7 (∀E: C5.4)      ¡
      f Q & P ~ Q ⇒ f P                ,! 8 (()E: 7)        ¡
      f P                              ,! 9 (⇒E: 6,8)       ¡
      ¬ f P                            ,! 10 (∃E: P1,3)     ¡
      ℱ                                ,! 11 (ℱI: 9,10)     ¡
    f Q ⇒ ℱ                            ,! 12 (⇒I: 4,11)     ¡
    ¬ f Q                              ,! 13 (¬I: 12)       ¡
    ι Q                                ,! 14 (∃I: P1,13)    ¡
  ι P & P ~ Q ⇒ ι Q                    ,! 15 (⇒I: 2,14)     ¡
  ( ι P & P ~ Q ⇒ ι Q )                ,! 16 (()I: 15)      ¡
```

∀P∀Q (ɪ P & P ~ Q ⇒ ɪ Q) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **7.** ¡

⊢ ∀P∀Q (ɪ P & Q ~ P ⇒ ɪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ɪ **P** & **Q** ~ **P** ,! 2 (Prem) ¡

Q ~ **P** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**Q** ~ **P** ⇒ **P** ~ **Q**) ,! 4 (∀E: III13.4) ¡

Q ~ **P** ⇒ **P** ~ **Q** ,! 5 (()E: 4) ¡

P ~ **Q** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ɪ **P** ,! 7 (&E: 2) ¡

ɪ **P** & **P** ~ **Q** ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(ɪ **P** & **P** ~ **Q** ⇒ ɪ **Q**) ,! 9 (∀E: P6) ¡

ɪ **P** & **P** ~ **Q** ⇒ ɪ **Q** ,! 10 (()E: 9) ¡

ɪ **Q** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ɪ **P** & **Q** ~ **P** ⇒ ɪ **Q** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ɪ **P** & **Q** ~ **P** ⇒ ɪ **Q**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q (ɪ P & Q ~ P ⇒ ɪ Q) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! P8 and P9 assert that predicates equivalent to infinite predicates are themselves infinite. ¡

! **8.** ¡

⊢ ∀P∀Q (ɪ P & P ≡ Q ⇒ ɪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**P** ≡ **Q** ⇒ **P** ~ **Q**) ,! 4 (∀E: III13.2) ¡

P ≡ **Q** ⇒ **P** ~ **Q** ,! 5 (()E: 4) ¡

P ~ **Q** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ɪ **P** ,! 7 (&E: 2) ¡

ɪ **P** & **P** ~ **Q** ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(ɪ **P** & **P** ~ **Q** ⇒ ɪ **Q**) ,! 9 (∀E: P6) ¡

ɪ **P** & **P** ~ **Q** ⇒ ɪ **Q** ,! 10 (()E: 9) ¡

ɪ **Q** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ ɪ **Q** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ ɪ **Q**) ,! 13 ()I: 12) ¡

∀P∀Q (ɪ P & P ≡ Q ⇒ ɪ Q) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **9.** ¡

⊢ ∀P∀Q (ɪ P & Q ≡ P ⇒ ɪ Q) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ɪ **P** & **Q** ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

Q ≡ **P** ,! 3 (&E: 2) ¡

(**Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q**) ,! 4 (∀E: II1.10) ¡

Q ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ,! 5 (()E: 4) ¡

P ≡ **Q** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ɪ **P** ,! 7 (&E: 2) ¡

ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ ɪ **Q**) ,! 9 (∀E: P8) ¡

ɪ **P** & **P** ≡ **Q** ⇒ ɪ **Q** ,! 10 (()E: 9) ¡

ɪ **Q** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ɪ **P** & **Q** ≡ **P** ⇒ ɪ **Q** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ɪ **P** & **Q** ≡ **P** ⇒ ɪ **Q**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q (ɪ P & Q ≡ P ⇒ ɪ Q) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **10.** Infinite predicates are non-empty. ¡

```
⊢ ∀P ( ι P ⇒ ∃x P[x] )                                          ¡
  P                                          ,! 1 (Prem)        ¡
    ι P                                      ,! 2 (Prem)        ¡
    ¬ f P                                    ,! 3 ($E: P1,2)    ¡
      ¬ ∃x P[x]                              ,! 4 (Prem)        ¡
      ( ¬ ∃x P[x] ⇒ f P )                    ,! 5 (∀E: C5.9)    ¡
      ¬ ∃x P[x] ⇒ f P                        ,! 6 (()E: 5)      ¡
      f P                                    ,! 7 (⇒E: 4,6)     ¡
      ℱ                                      ,! 8 (ℱI: 3,7)     ¡
    ¬ ∃x P[x] ⇒ ℱ                            ,! 9 (⇒I: 4,8)     ¡
    ¬¬ ∃x P[x]                               ,! 10 (¬I: 9)      ¡
    ∃x P[x]                                  ,! 11 (¬E: 10)     ¡
  ι P ⇒ ∃x P[x]                              ,! 12 (⇒I: 2,11)   ¡
  ( ι P ⇒ ∃x P[x] )                          ,! 13 (()I: 12)    ¡
∀P ( ι P ⇒ ∃x P[x] )                          ! 14 (∀I: 1,13)    ¡
□
```

! **11.** Sub-predicates of infinite predicates are infinite. ¡

```
⊢ ∀P∀Q ( ι Q & Q ⊆ P ⇒ ι P )                                     ¡
  P,Q                                        ,! 1 (Prem)        ¡
    ι Q & Q ⊆ P                              ,! 2 (Prem)        ¡
    ι Q                                      ,! 3 (&E: 2)       ¡
    Q ⊆ P                                    ,! 4 (&E: 2)       ¡
      f P                                    ,! 5 (Prem)        ¡
      f P & Q ⊆ P                            ,! 6 (&I: 4,5)     ¡
      ( f P & Q ⊆ P ⇒ f Q )                  ,! 7 (∀E: C5.12)   ¡
      f P & Q ⊆ P ⇒ f Q                      ,! 8 (()E: 7)      ¡
      f Q                                    ,! 9 (⇒E: 6,8)     ¡
      ¬ f Q                                  ,! 10 ($E: P1,3)   ¡
```

$\mathfrak{F}$,! 11 ($\mathfrak{F}$I: 9,10) ¡

f **P** $\Rightarrow$ $\mathfrak{F}$,! 12 ($\Rightarrow$I: 5,11) ¡

$\neg$ f **P** ,! 13 ($\neg$I: 12) ¡

$\imath$ **P** ,! 14 ($\mathbb{S}$I: P1,13) ¡

$\imath$ **Q** & **Q** $\subseteq$ **P** $\Rightarrow$ $\imath$ **P** ,! 15 ($\Rightarrow$I: 2,14) ¡

($\imath$ **Q** & **Q** $\subseteq$ **P** $\Rightarrow$ $\imath$ **P**) ,! 16 (()I: 15) ¡

$\forall$P$\forall$Q ($\imath$ Q & Q $\subseteq$ P $\Rightarrow$ $\imath$ P) ! 17 ($\forall$I: 1,16) ¡

□

! **12.** The difference of an infinite and finite predicate (in that order) is infinite. ¡

⊢ $\forall$P$\forall$Q ($\imath$ P & f Q $\Rightarrow$ $\imath$ (P \ Q)) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

$\imath$ **P** & f **Q** ,! 2 (Prem) ¡

$\imath$ **P** ,! 3 (&E: 2) ¡

f **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

f (**P** \ **Q**) ,! 5 (Prem) ¡

f (**P** \ **Q**) & f **Q** ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(f (**P** \ **Q**) & f **Q** $\Rightarrow$ f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**))
,! 7 ($\forall$E: C5.20) ¡

f (**P** \ **Q**) & f **Q** $\Rightarrow$ f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q** ,! 8 (()E: 7) ¡

f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) ,! 9 ($\Rightarrow$E: 6,8) ¡

P $\subseteq$ (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) ,! 10 ($\forall$E: II7.64) ¡

f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) & **P** $\subseteq$ (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**)
,! 11 (&I: 9,10) ¡

(f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) & **P** $\subseteq$ (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) $\Rightarrow$ f **P**)
,! 12 ($\forall$E: C5.12) ¡

f (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) & **P** $\subseteq$ (($\mathbf{P}$ \ **Q**) $\cup$ **Q**) $\Rightarrow$ f **P**
,! 13 (()E: 12) ¡

f **P** ,! 14 ($\Rightarrow$E: 11,13) ¡

$\neg$ f **P** ,! 15 ($\mathbb{S}$E: P1,3) ¡

$\mathfrak{F}$,! 16 ($\mathfrak{F}$I: 14,15) ¡

f (**P** \ **Q**) ⇒ $\mathfrak{F}$,! 17 (⇒I: 5,16) ¡

¬ f (**P** \ **Q**) ,! 18 (¬I: 17) ¡

ɪ (**P** \ **Q**) ,! 19 ($I: P1,18) ¡

ɪ **P** & f **Q** ⇒ ɪ (**P** \ **Q**) ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(ɪ **P** & f **Q** ⇒ ɪ (**P** \ **Q**)) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀P∀Q (ɪ P & f Q ⇒ ɪ (P \ Q)) ! 22 (∀I: 1,21) ¡

□

! **13.** P13 is a simple corollary to P12. ¡

⊢ ∀P∀a (ɪ P ⇒ ɪ (P \ (a•))) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ɪ **P** ,! 2 (Prem) ¡

f (**a**•) ,! 3 (∀E: C5.17) ¡

ɪ **P** & f (**a**•) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ɪ **P** & f (**a**•) ⇒ ɪ (**P** \ (**a**•))) ,! 5 (∀E: P12) ¡

ɪ **P** & f (**a**•) ⇒ ɪ (**P** \ (**a**•)) ,! 6 (()E: 5) ¡

ɪ (**P** \ (**a**•)) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ɪ **P** ⇒ ɪ (**P** \ (**a**•)) ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ɪ **P** ⇒ ɪ (**P** \ (**a**•))) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀P∀a (ɪ P ⇒ ɪ (P \ (a•))) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **14.** ¡

⊢ ∀P∀Q (ɪ P & f Q ⇒ ∃x (P \ Q)[x]) ¡

P,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ɪ **P** & f **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(ɪ **P** & f **Q** ⇒ ɪ (**P** \ **Q**)) ,! 3 (∀E: P12) ¡

ɪ **P** & f **Q** ⇒ ɪ (**P** \ **Q**) ,! 4 (()E: 3) ¡

ɪ (**P** \ **Q**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ι (**P** \ **Q**) ⇒ ∃x (**P** \ **Q**)[x]) ,! 6 (∀E: P10) ¡

ι (**P** \ **Q**) ⇒ ∃x (**P** \ **Q**)[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃x (**P** \ **Q**)[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ι **P** & *f* **Q** ⇒ ∃x (**P** \ **Q**)[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ι **P** & *f* **Q** ⇒ ∃x (**P** \ **Q**)[x]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀Q (ι P & *f* Q ⇒ ∃x (P \ Q)[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **15.** Infinite predicates have sub-predicates with every finite size. ¡

⊢ ∀n∀P (ω[n] & ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)) ¡

! We first prove
∀n (ω[n] ⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)))
using induction, taking ϕ to be
∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))
We must prove
∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ P))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))
⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[m,Q] & Q ⊆ P))). ¡

! To prove:
∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ P)) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ι **P** ,! 2 (Prem) ¡

ϕ ⊆ **P** ,! 3 (∀E: II5.9) ¡

ℕ[0,ϕ] & ϕ ⊆ **P** ,! 4 (&I: C3.14,3) ¡

(ℕ[0,ϕ] & ϕ ⊆ **P**) ,! 5 (()I: 4) ¡

∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 6 (∃I: 5) ¡

ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ **P**)) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[0,Q] & Q ⊆ P)) ,! 9 (∀I: 1,8) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))

```
          ⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[m,Q] & Q ⊆ P)) )                    ¡
  n,m                                          ,! 10 (Prem)      ¡
    ω[n] & σ[n,m] & ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))
                                               ,! 11 (Prem)      ¡
    ω[n] & σ[n,m]                              ,! 12 (&E: 11)    ¡
    ω[n]                                       ,! 13 (&E: 11)    ¡
    ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))             ,! 14 (&E: 11)    ¡
      P                                        ,! 15 (Prem)      ¡
        ι P                                    ,! 16 (Prem)      ¡
! Applying the Induction hypothesis...                           ¡
        (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))            ,! 17 (∀E: 14)    ¡
        ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)              ,! 18 (()E: 17)   ¡
        ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)                    ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡
        (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)                       ,! 20 (∃E: 19)    ¡
        ℕ[n,Q] & Q ⊆ P                         ,! 21 (()E: 20)   ¡
        ℕ[n,Q]                                 ,! 22 (&E: 21)    ¡
        Q ⊆ P                                  ,! 23 (&E: 21)    ¡
        ω[n] & ℕ[n,Q]                          ,! 24 (&I: 13,22) ¡
        ( ω[n] & ℕ[n,Q] ⇒ f Q )                 ,! 25 (∀E: C5.2)  ¡
        ω[n] & ℕ[n,Q] ⇒ f Q                    ,! 26 (()E: 25)   ¡
        f Q                                    ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡
        ι P & f Q                              ,! 28 (&I: 16,27) ¡
        ( ι P & f Q ⇒ ∃x (P \ Q)[x] )          ,! 29 (∀E: P12)   ¡
        ι P & f Q ⇒ ∃x (P \ Q)[x]              ,! 30 (()E: 29)   ¡
        ∃x (P \ Q)[x]                          ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡
        (P \ Q)[a]                             ,! 32 (∃E: 31)    ¡
        ( (P \ Q)[a] ⇒ P[a] & ¬ Q[a] )         ,! 33 (∀E: II7.3) ¡
        (P \ Q)[a] ⇒ P[a] & ¬ Q[a]             ,! 34 (()E: 33)   ¡
```

P[**a**] & ¬ **Q**[**a**] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

P[**a**] ,! 36 (&E: 35) ¡

¬ **Q**[**a**] ,! 37 (&E: 35) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **Q**[**a**] ,! 38 (&I: 12,37) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **Q**[**a**] & ℕ[**n**,**Q**] ,! 39 (&I: 22,38) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **Q**[**a**] & ℕ[**n**,**Q**] ⇒ ℕ[**m**,(**Q** ∪ (**a**•))])
,! 40 (∀E: C2.12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **Q**[**a**] & ℕ[**n**,**Q**] ⇒ ℕ[**m**,(**Q** ∪ (**a**•))]
,! 41 ()E: 40) ¡

ℕ[**m**,(**Q** ∪ (**a**•))] ,! 42 (⇒E: 39,41) ¡

(**P**[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **P**) ,! 43 (∀E: II8.13) ¡

P[**a**] ⇒ (**a**•) ⊆ **P** ,! 44 ()E: 43) ¡

(**a**•) ⊆ **P** ,! 45 (⇒E: 36,44) ¡

Q ⊆ **P** & (**a**•) ⊆ **P** ,! 46 (&I: 23,45) ¡

(**Q** ⊆ **P** & (**a**•) ⊆ **P** ⇒ (**Q** ∪ (**a**•)) ⊆ **P**)
,! 47 (∀E: II2.14) ¡

Q ⊆ **P** & (**a**•) ⊆ **P** ⇒ (**Q** ∪ (**a**•)) ⊆ **P**
,! 48 ()E: 47) ¡

(**Q** ∪ (**a**•)) ⊆ **P** ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

ℕ[**m**,(**Q** ∪ (**a**•))] & (**Q** ∪ (**a**•)) ⊆ **P**
,! 50 (&I: 42,49) ¡

(ℕ[**m**,(**Q** ∪ (**a**•))] & (**Q** ∪ (**a**•)) ⊆ **P**)
,! 51 ()I: 50) ¡

∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 52 (∃I: 51) ¡

ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 53 (⇒I: 16,52) ¡

(ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**)) ,! 54 ()I: 53) ¡

∀P (ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**)) ,! 55 (∀I: 15,54) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ P))
⇒ ∀P (ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**))
,! 56 (⇒I: 11,55) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ P))

⇒ ∀P (ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**m**,Q] & Q ⊆ **P**)))
,! 57 (()I: 56) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))
⇒ ∀P (ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[m,Q] & Q ⊆ **P**)))
,! 58 (∀I: 10,57) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P)))
! 59 (Induct: 9,58)
¡

n,**P** ,! 60 (Prem) ¡

ω[**n**] & ι **P** ,! 61 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 62 (&E: 61) ¡

ι **P** ,! 63 (&E: 61) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ P)))
,! 64 (∀E: 59) ¡

ω[**n**] ⇒ ∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ P))
,! 65 (()E: 64) ¡

∀P (ι P ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ P)) ,! 66 (⇒E: 62,65) ¡

(ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ **P**)) ,! 67 (∀E: 66) ¡

ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 68 (()E: 67) ¡

∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 69 (⇒E: 63,68) ¡

ω[**n**] & ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ **P**) ,! 70 (⇒I: 61,69) ¡

(ω[**n**] & ι **P** ⇒ ∃Q (ℕ[**n**,Q] & Q ⊆ **P**)) ,! 71 (()I: 70) ¡

∀n∀P (ω[n] & ι P ⇒ ∃Q (ℕ[n,Q] & Q ⊆ P))
! 72 (∀I: 60,71) ¡

□

! **16.** P16 is a refinement of P15. Not only do all infinite predicates have sub-predicates of every finite size, but given a particular finite predicate Q, they have sub-predicates of every finite size which have non-empty intersection with Q. ¡

⊢ ∀n∀P∀Q (ω[n] & ι P & *f* Q
⇒ ∃R (ℕ[n,R] & R ⊆ P & (Q ∩ R) ≡ ϕ)) ¡

n,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ι **P** & *f* **Q** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

$\iota\ \mathbf{P}\ \&\ f\ \mathbf{Q}$,! 4 (&E: 2) ¡

$(\ \iota\ \mathbf{P}\ \&\ f\ \mathbf{Q} \Rightarrow \iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ )$,! 5 (∀E: P12) ¡

$\iota\ \mathbf{P}\ \&\ f\ \mathbf{Q} \Rightarrow \iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 6 (()E: 5) ¡

$\iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 8 (&I: 3,7) ¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \exists Q\ (\mathbb{N}[\mathbf{n},Q]\ \&\ Q \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))\ )$
,! 9 (∀E: P15) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \iota\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow \exists Q\ (\mathbb{N}[\mathbf{n},Q]\ \&\ Q \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$
,! 10 (()E: 9) ¡

$\exists Q\ (\mathbb{N}[\mathbf{n},Q]\ \&\ Q \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

$(\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}))$,! 12 (∃E: 11) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 13 (()E 12) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]$,! 14 (&E: 13) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})$,! 15 (&E: 13) ¡

$(\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 16 (∀E: II7.13) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P}$,! 17 (&I: 15,16) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}\ )$
,! 18 (∀E: II1.5) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q})\ \&\ (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 19 (()E: 18) ¡

$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$,! 21 (&I: 14,20) ¡

$(\ \mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi\ )$,! 22 (∀E: II7.22) ¡

$\mathbf{R} \subseteq (\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 23 (()E: 22) ¡

$(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 24 (⇒E: 15,23) ¡

$\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi$,! 25 (&I: 21,24) ¡

$(\mathbb{N}[\mathbf{n},\mathbf{R}]\ \&\ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}) \equiv \phi)$,! 26 (()I: 25) ¡

$\exists R\ (\mathbb{N}[\mathbf{n},R]\ \&\ R \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{Q} \cap R) \equiv \phi)$,! 27 (∃I: 26) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \iota\ \mathbf{P}\ \&\ f\ \mathbf{Q} \Rightarrow \exists R\ (\mathbb{N}[\mathbf{n},R]\ \&\ R \subseteq \mathbf{P}\ \&\ (\mathbf{Q} \cap R) \equiv \phi)$
,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(ω[**n**] & ι **P** & *f* **Q** ⇒ ∃R(ℕ[**n**,R] & R ⊆ **P** & (**Q** ∩ R) ≡ ϕ))
,! 29 ()I: 28)

∀n∀P∀Q (ω[n] & ι P & *f* Q ⇒ ∃R(ℕ[n,R] & R ⊆ P & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
! 30 (∀I: 1,29)

□

! **17.** The antecedent says that for every finite number, there is that many things and at least one more. This can be called "potential infinity". The consequent says that the universal predicate is infinite. In brief, potential infinity implies actual infinity. An appeal to C4.18 is the key to the proof.

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a])) ⇒ ι 𝕌

∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a])) ,! 1 (Prem)

f 𝕌 ,! 2 (Prem)

∃n (ω[n] & ℕ[n,𝕌]) ,! 3 (𝕊E: C5.1,2)

(ω[**n**] & ℕ[**n**,𝕌]) ,! 4 (∃E: 3)

ω[**n**] & ℕ[**n**,𝕌] ,! 5 ()E: 4)

ω[**n**] ,! 6 (&E: 5)

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (ℕ[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 7 (∀E: 1)

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (ℕ[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 8 ()E: 7)

∃P∃a (ℕ[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 9 (⇒E: 6,8)

∃a (ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[a]) ,! 10 (∃E: 9)

(ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**]) ,! 11 (∃E: 10)

ℕ[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 12 ()E: 11)

ℕ[**n**,**P**] ,! 13 (&E: 12)

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,𝕌] ,! 14 (&I: 5,13)

P ⊆ 𝕌 ,! 15 (∀E: II6.7)

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,𝕌] & **P** ⊆ 𝕌 ,! 16 (&I: 14,15)

(ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,𝕌] & **P** ⊆ 𝕌 ⇒ **P** ≡ 𝕌)
,! 17 (∀E: C4.18)

ω[**n**] & ℕ[**n**,**P**] & ℕ[**n**,𝕌] & **P** ⊆ 𝕌 ⇒ **P** ≡ 𝕌
,! 18 ()E: 17)

P ≡ 𝕌 ,! 19 (⇒E: 16,18)

(**P** ≡ 𝕌 ⇒ ∀x **P**[x]) ,! 20 (∀E: II6.4) ¡

P ≡ 𝕌 ⇒ ∀x **P**[x] ,! 21 (()E: 20) ¡

∀x **P**[x] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

P[**a**] ,! 23 (∀E: 22) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 24 (&E: 12) ¡

ℱ ,! 25 (ℱI: 23,24) ¡

f 𝕌 ⇒ ℱ ,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

¬ *f* 𝕌 ,! 27 (¬E: 26) ¡

⊏⊏ι 𝕌 ,! 28 (𝕊I: P1,27) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a])) ⇒ ι 𝕌
! 29 (⇒I: 1,28) ¡

□