!CHAPTER 7

AN INFINITY OF THINGS¡

! In this chapter it is proven that there are an infinity of things. The "hierarchal" technique used here is due to Dedekind and appeared in "The Nature and Meaning of Numbers." Dedekind essentially considered the self, the thought of the self, the thought of the thought of the self, and so on, to establish there are an infinity of things. Here we essentially consider the empty predicate P1, the predicate P2 of being equal to the empty predicate, the predicate P3 of being equal to either P1 and P2, and so, that is, using the same hierarchal cascade, although with different links in the chain. Note that Frege has an alternative proof, which might be called the "bootstrap" approach: 0 is one thing, 0 and 1 are two things, and so forth. This also can be formulated in our system, although the proof is longer.

P1 introduces the notion of a hierarchal predicate. P6 proves that there are hierarchal predicates of any finite size, from which the existence of potential infinity follows immediately in P7. It follows from C6.17 that the universal predicate is infinite (proposition P10). The rest of the chapter establishes consequences. It should be remarked that one of these (P19) predicate P, there is another predicate Q of every finite size either containing or contained in P. ¡

! **1.** ℋ represents a hierarchal predicate. ¡

𝕊 ℋ ; ℋ P ; ∀Q (P[Q] ⇒ Q ⊂ P) ¡

! P2 through P5 are lemmas used to establish P6.

! **2.** ¡

⊢ ∀P (ℋ P ⇒ ¬ P[P]) ¡

P	,! 1 (Prem)	¡
ℋ **P**	,! 2 (Prem)	¡
∀Q (**P**[Q] ⇒ Q ⊂ **P**)	,! 3 (𝕊E: P1,2)	¡
P[**P**]	,! 4 (Prem)	¡
(**P**[**P**] ⇒ **P** ⊂ **P**)	,! 5 (∀E: 3)	¡
P[**P**] ⇒ **P** ⊂ **P**	,! 6 (()E: 5)	¡
P ⊂ **P**	,! 7 (⇒E: 4,6)	¡
¬ **P** ⊂ **P**	,! 8 (∀E: II1.56)	¡
𝔉	,! 9 (𝔉I: 7,8)	¡
P[**P**] ⇒ 𝔉	,! 10 (⇒I: 4,9)	¡
¬ **P**[**P**]	,! 11 (¬I: 10)	¡
ℋ **P** ⇒ ¬ **P**[**P**]	,! 12 (⇒I: 2,11)	¡

(ℋ **P** ⇒ ¬ **P**[**P**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P (ℋ P ⇒ ¬ P[P]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **3.** ¡

⊢ ℋ ϕ ¡

Q ,! 1 (Prem) ¡

ϕ[**Q**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ **Q** ⊂ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

¬ ϕ[**Q**] ,! 4 (∀E: II5.3) ¡

𝔉 ,! 5 (𝔉I: 2,4) ¡

¬ **Q** ⊂ ϕ ⇒ 𝔉 ,! 6 (⇒I: 3,5) ¡

¬¬ **Q** ⊂ ϕ ,! 7 (¬I: 6) ¡

Q ⊂ ϕ ,! 8 (¬E: 7) ¡

ϕ[**Q**] ⇒ **Q** ⊂ ϕ ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ϕ[**Q**] ⇒ **Q** ⊂ ϕ) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀Q (ϕ[Q] ⇒ Q ⊂ ϕ) ,! 11 (∀I: 1,10) ¡

ℋ ϕ ! 12 (𝕾I: P1,11) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ ∀P (ℋ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ℋ **P** ,! 2 (Prem) ¡

P ≡ (**P** ∪ (**P**•)) ,! 3 (Prem) ¡

(**P**•)[**P**] ,! 4 (∀E: II8.5) ¡

(**P**•) ⊆ (**P** ∪ (**P**•)) ,! 5 (∀E: II2.13) ¡

P ≡ (**P** ∪ (**P**•)) & (**P**•) ⊆ (**P** ∪ (**P**•))
,! 6 (&I: 3,5) ¡

(**P** ≡ (**P** ∪ (**P**•)) & (**P**•) ⊆ (**P** ∪ (**P**•)) ⇒ (**P**•) ⊆ **P**)
,! 7 (∀E: II1.31) ¡

P ≡ (P ∪ (P•)) & (P•) ⊆ (P ∪ (P•)) ⇒ (P•) ⊆ P
,! 8 (()E: 7) ¡

(P•) ⊆ P ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(P•)[P] & (P•) ⊆ P ,! 10 (&I: 4,9) ¡

((P•)[P] & (P•) ⊆ P ⇒ P[P]) ,! 11 (∀E: II1.2) ¡

(P•)[P] & (P•) ⊆ P ⇒ P[P] ,! 12 (()E: 11) ¡

P[P] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(ℌ P ⇒ ¬ P[P]) ,! 14 (∀E: P2) ¡

ℌ P ⇒ ¬ P[P] ,! 15 (()E: 14) ¡

¬ P[P] ,! 16 (⇒E: 2,15) ¡

𝔉 ,! 17 (𝔉I: 13,16) ¡

P ≡ (P ∪ (P•)) ⇒ 𝔉 ,! 18 (⇒I: 3,17) ¡

¬ P ≡ (P ∪ (P•)) ,! 19 (¬I: 18) ¡

ℌ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•)) ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(ℌ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•))) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀P (ℌ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•))) ! 22 (∀I: 1,21) ¡

□

! **5.** ¡

⊢ ∀P (ℌ P ⇒ ℌ (P ∪ (P•))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ℌ P ,! 2 (Prem) ¡

∀Q (P[Q] ⇒ Q ⊂ P) ,! 3 (𝕾E: P1,2) ¡

Q ,! 4 (Prem) ¡

(P ∪ (P•))[Q] ,! 5 (Prem) ¡

((P ∪ (P•))[Q] ⇒ P[Q] ∨ (P•)[Q])
,! 6 (∀E: II2.3) ¡

(P ∪ (P•))[Q] ⇒ P[Q] ∨ (P•)[Q] ,! 7 (()E: 6) ¡

P[Q] ∨ (P•)[Q] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

P ⊆ (P ∪ (P•))   ,! 9 (∀E: II2.12)   ¡

P[Q]   ,! 10 (Prem)   ¡

(P[Q] ⇒ Q ⊂ P)   ,! 11 (∀E: 3)   ¡

P[Q] ⇒ Q ⊂ P   ,! 12 (()E: 11)   ¡

Q ⊂ P   ,! 13 (⇒E: 10,12)   ¡

Q ⊂ P & P ⊆ (P ∪ (P•))   ,! 14 (&I: 9,13)   ¡

(Q ⊂ P & P ⊆ (P ∪ (P•)) ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•)))
,! 15(∀E: II1.58)   ¡

Q ⊂ P & P ⊆ (P ∪ (P•)) ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•))
,! 16 (()E: 15)   ¡

Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 17 (⇒E: 14,16)   ¡

P[Q] ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 18 (⇒I: 10,17)   ¡

(P•)[Q]   ,! 19 (Prem)   ¡

(ℌ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•)))   ,! 20 (∀E: P4)   ¡

ℌ P ⇒ ¬ P ≡ (P ∪ (P•))   ,! 21 (()E: 20)   ¡

¬ P ≡ (P ∪ (P•))   ,! 22 (⇒E: 2,21)   ¡

P ⊆ (P ∪ (P•)) & ¬ P ≡ (P ∪ (P•))
,! 23 (&I: 9,22)   ¡

P ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 24 (𝕊I: II1.49,23)
¡

((P•)[Q] ⇒ Q = P)   ,! 25 (∀E: II8.3)   ¡

(P•)[Q] ⇒ Q = P   ,! 26 (()E: 25)   ¡

Q = P   ,! 27 (⇔E: 19,26)   ¡

Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 28 (=E: 24,27)   ¡

(P•)[Q] ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 29 (⇒I: 19,28)   ¡

Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 30 (∨E: 8,18,29) ¡

(P ∪ (P•))[Q] ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•))   ,! 31 (⇒I: 5,30)   ¡

((P ∪ (P•))[Q] ⇒ Q ⊂ (P ∪ (P•)))
,! 32 (()I: 31)   ¡

∀Q ((**P** ∪ (**P**•))[Q] ⇒ Q ⊂ (**P** ∪ (**P**•)))
,! 33 (∀I: 4,32) ¡

ℌ (**P** ∪ (**P**•)) ,! 34 (𝕾I: P1,33) ¡

ℌ **P** ⇒ ℌ (**P** ∪ (**P**•)) ,! 35 (⇒I: 2,34) ¡

(ℌ **P** ⇒ ℌ (**P** ∪ (**P**•))) ,! 36 (()I: 35) ¡

∀P (ℌ P ⇒ ℌ (P ∪ (P•))) ! 37 (∀I: 1,36) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])) ¡

! We use induction, taking *ϕ* to be
∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])
It must be shown that
∃B (ℌ B & 𝔑[0,B])
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])
⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[m,B])). ¡

! To prove:
∃B (ℌ B & 𝔑[0,B]) ¡

ℌ ϕ & 𝔑[0,ϕ] ,! 1 (&I: C3.14,P3) ¡

(ℌ ϕ & 𝔑[0,ϕ]) ,! 2 (()I: 1) ¡

∃B (ℌ B & 𝔑[0,B]) ! 3 (∃I: 2) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])
⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[m,B])). ¡

n,**m** ,! 4 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∃B (ℌ B & 𝔑[**n**,B]) ,! 5 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

∃B (ℌ B & 𝔑[**n**,B]) ,! 7 (&E: 5) ¡

(ℌ **B** & 𝔑[**n**,**B**]) ,! 8 (∃E: 7) ¡

ℌ **B** & 𝔑[**n**,**B**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ℌ **B** ,! 10 (&E: 9) ¡

𝔑[**n**,**B**] ,! 11 (&E: 9) ¡

(ℌ B ⇒ ℌ (B ∪ (B•))) ,! 12 (∀E: P5) ¡

ℌ B ⇒ ℌ (B ∪ (B•)) ,! 13 (()E: 12) ¡

ℌ (B ∪ (B•)) ,! 14 (⇒E: 10,13) ¡

ω[n] & σ[n,m] & 𝔑[n,B] ,! 15 (&I: 6,11) ¡

(ℌ B ⇒ ¬ B[B]) ,! 16 (∀E: P2) ¡

ℌ B ⇒ ¬ B[B] ,! 17 (()E: 16) ¡

¬ B[B] ,! 18 (⇒E: 10,17) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ B[B] & 𝔑[n,B] ,! 19 (&I: 15,18) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ¬ B[B] & 𝔑[n,B] ⇒ 𝔑[m,(B ∪ (B•))])
,! 20 (∀E: C2.12) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ B[B] & 𝔑[n,B] ⇒ 𝔑[m,(B ∪ (B•))]
,! 21 (()E: 20) ¡

𝔑[m,(B ∪ (B•))] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

ℌ (B ∪ (B•)) & 𝔑[m,(B ∪ (B•))] ,! 23 (&I: 14,22) ¡

(ℌ (B ∪ (B•)) & 𝔑[m,(B ∪ (B•))]) ,! 24 (()I: 23) ¡

∃B (ℌ B & 𝔑[m,B]) ,! 25 (∃I: 24) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B]) ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[m,B])
,! 26 (⇒I: 5,25) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B]) ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[m,B]))
,! 27 (()I: 26) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])
⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[m,B]))
,! 28 (∀I: 4,27) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[n,B])) ! 29 (Induct: 3,28)
¡

□

! **7.** P7 establishes that there is more things than can be numbered by any finite number, i.e. there is a potential infinity. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a])) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[**n**,B])) ,! 3 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃B (ℌ B & 𝔑[**n**,B]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃B (ℌ B & 𝔑[**n**,B]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ℌ **B** & 𝔑[**n**,**B**]) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ℌ **B** & 𝔑[**n**,**B**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ℌ **B** ,! 8 (&E: 7) ¡

𝔑[**n**,**B**] ,! 9 (&E: 7) ¡

(ℌ **B** ⇒ ¬ **B**[**B**]) ,! 10 (∀E: P2) ¡

ℌ **B** ⇒ ¬ **B**[**B**] ,! 11 (()E: 10) ¡

¬ **B**[**B**] ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

𝔑[**n**,**B**] & ¬ **B**[**B**] ,! 13 (&I: 9,12) ¡

(𝔑[**n**,**B**] & ¬ **B**[**B**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∃a (𝔑[**n**,**B**] & ¬ **B**[a]) ,! 15 (∃I: 14) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 16 (∃I: 15) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a])) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **8.** P8 is a weaker version of potential infinity. An appeal to P6 directly would have resulted in a proof with one fewer step.
¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃P 𝔑[n,P]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 3 (∀E: P7) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[**a**]) ,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 9 (&E: 8) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 10 (∃I: 9) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃P 𝔑[n,P]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & P[a])) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 5 (∀E: P8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ,! 9 (&I: 4,8) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x]) ,! 10 (∀E: C3.17) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃x **P**[x] ,! 11 (()E: 10) ¡

∃x **P**[x] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

P[**a**] ,! 13 (∃E: 12) ¡

𝔑[**n**,**P**] & **P**[**a**] ,! 14 (&I: 8,13) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & **P**[**a**]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∃a(𝔑[**n**,**P**] & **P**[a]) ,! 16 (∃I: 15) ¡

∃P∃a(𝔑[**n**,P] & P[a]) ,! 17 (∃I: 16) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃P∃a(𝔑[**n**,P] & P[a]) ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃P∃a(𝔑[**n**,P] & P[a]))

,! 19 (()I: 18) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & P[a]))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **10.** The universal predicate is infinite. ¡

⊢ ι 𝕌 ¡

ι 𝕌 ! 1 (⇒E: C6.17,P7)
¡

▯

! **11.** ¡

⊢ ∀P (ƒ P ⇒ ι (𝕌 \ P)) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ƒ **P** ,! 2 (Prem) ¡

ι 𝕌 & ƒ **P** ,! 3 (&I: P10,2) ¡

(ι 𝕌 & ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**)) ,! 4 (∀E: C6.12) ¡

ι 𝕌 & ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**) ,! 5 (()E: 4) ¡

ι (𝕌 \ **P**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**)) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P (ƒ P ⇒ ι (𝕌 \ P)) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀P (ƒ P ⇒ ∃x ¬ P[x]) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ƒ **P** ,! 2 (Prem) ¡

(ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**)) ,! 3 (∀E: P11) ¡

ƒ **P** ⇒ ι (𝕌 \ **P**) ,! 4 (()E: 3) ¡

ι (𝕌 \ **P**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ι (𝕌 \ **P**) ⇒ ∃x(𝕌 \ **P**)[x]) ,! 6 (∀E: C6.10) ¡

ι (𝕌 \ **P**) ⇒ ∃x(𝕌 \ **P**)[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃x (𝕌 \ **P**)[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(𝕌 \ **P**)[**x**] ,! 9 (∃E: 8) ¡

((𝕌 \ **P**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 10 (∀E: II7.6) ¡

(𝕌 \ **P**)[**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 11 (()E: 10) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

∃x ¬ **P**[x] ,! 13 (∃I: 12) ¡

f **P** ⇒ ∃x ¬ **P**[x] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(*f* **P** ⇒ ∃x ¬ **P**[x]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀P (*f* P ⇒ ∃x ¬ P[x]) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **13.** ¡

⊢ ∀P∀n (ω[n] & 𝔑[n,P] ⇒ ∃x ¬ P[x]) ¡

P,**n** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ *f* **P**) ,! 3 (∀E: C5.2) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ *f* **P** ,! 4 (()E: 3) ¡

f **P** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(*f* **P** ⇒ ∃x ¬ **P**[x]) ,! 6 (∀E: P12) ¡

f **P** ⇒ ∃x ¬ **P**[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃x ¬ **P**[x] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃x ¬ **P**[x] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ ∃x ¬ **P**[x]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀P∀n (ω[n] & 𝔑[n,P] ⇒ ∃x ¬ P[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 4 (∀E: P7) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃a (♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[a]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

(♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**]) ,! 8 (∃E: 7) ¡

♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 9 (()E: 8) ¡

♑[**n**,**P**] ,! 10 (&E: 9) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 11 (&E: 9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] ,! 12 (&I: 2,11) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & ♑[**n**,**P**] ,! 13 (&I: 10,12) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & ♑[**n**,**P**] ⇒ ♑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 14 (∀E: C2.12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ¬ **P**[**a**] & ♑[**n**,**P**] ⇒ ♑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 15 (()E: 14) ¡

♑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & ♑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 17 (&I: 9,16) ¡

(♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & ♑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∃a (♑[**n**,**P**] & ¬ **P**[a] & ♑[**m**,(**P** ∪ (a•))])
,! 19 (∃I: 18) ¡

∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a] & ♑[**m**,(P ∪ (a•))])
,! 20 (∃I: 19) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a] & ♑[**m**,(P ∪ (a•))])
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ∃P∃a (♑[**n**,P] & ¬ P[a] & ♑[**m**,(P ∪ (a•))]))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (♑[n,P] & ¬ P[a] & ♑[m,(P ∪ (a•))]))
! 23 (∀I: 1,22) ¡

□

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ∃P∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))]) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))]))
,! 3 (∀E: P14) ¡

ω[n] & σ[n,m] ⇒ ∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))])
,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃a (ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))])
,! 6 (∃E: 5) ¡

(ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

ℕ[n,P] & ¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))] ,! 8 (()E: 7) ¡

ℕ[m,(P ∪ (a•))] ,! 9 (&E: 8) ¡

∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))] ,! 10 (∃I: 9) ¡

∃P∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))] ,! 11 (∃I: 10) ¡

ω[n] & σ[n,m] ⇒ ∃P∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[n] & σ[n,m] ⇒ ∃P∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))])
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ∃P∃a ℕ[m,(P ∪ (a•))])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **16.** ¡

⊢ ∀n∀m∀P (ω[n] & ℕ[n,P] & σ[n,m]
⇒ ∃a (¬ P[a] & ℕ[m,(P ∪ (a•))])) ¡

n,m,P ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ℕ[n,P] & σ[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ℕ[n,P] ,! 3 (&E: 2) ¡

σ[n,m] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[n] & σ[n,m] & 𝔑[n,P] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(ω[n] & 𝔑[n,P] ⇒ ∃x ¬ P[x]) ,! 6 (∀E: P13) ¡

ω[n] & 𝔑[n,P] ⇒ ∃x ¬ P[x] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃x ¬ P[x] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

¬ P[a] ,! 9 (∃E: 8) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ,! 10 (&I: 5,9) ¡

(ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ⇒ 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
,! 11 (∀E: C2.12) ¡

ω[n] & σ[n,m] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ⇒ 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
,! 12 (()E: 11) ¡

𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 14 (&I: 9,13) ¡

(¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]) ,! 15 (()I: 14) ¡

∃a (¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]) ,! 16 (∃I: 15) ¡

ω[n] & 𝔑[n,P] & σ[n,m] ⇒ ∃a (¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[n] & 𝔑[n,P] & σ[n,m] ⇒ ∃a (¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]))
,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m∀P (ω[n] & 𝔑[n,P] & σ[n,m]
⇒ ∃a (¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]))
! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀n∀P (ω[n] & ƒ P ⇒ ∃Q (𝔑[n,Q] & (P ∩ Q) ≡ φ)) ¡

n,P ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ƒ P ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ι 𝕌 & ƒ P ,! 3 (&I: P10,2) ¡

(ω[n] & ι 𝕌 & ƒ P
⇒ ∃R (𝔑[n,R] & R ⊆ 𝕌 & (P ∩ R) ≡ φ))
,! 4 (∀E: C6.16) ¡

ω[**n**] & ι 𝕌 & *f* **P** ⇒ ∃R (𝔑[**n**,R] & R ⊆ 𝕌 & (**P** ∩ R) ≡ ϕ)
,! 5 (()E: 4) ¡

∃R (𝔑[**n**,R] & R ⊆ 𝕌 & (**P** ∩ R) ≡ ϕ) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(𝔑[**n**,**R**] & **R** ⊆ 𝕌 & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ) ,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**R**] & **R** ⊆ 𝕌 & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[**n**,**R**] ,! 9 (&E: 8) ¡

(**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 10 (&E: 8) ¡

𝔑[**n**,**R**] & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(𝔑[**n**,**R**] & (**P** ∩ **R**) ≡ ϕ) ,! 12 (()I: 11) ¡

∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 13 (∃I: 12) ¡

ω[**n**] & *f* **P** ⇒ ∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ),! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(ω[**n**] & *f* **P** ⇒ ∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀P (ω[n] & *f* P ⇒ ∃Q (𝔑[n,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃P∃Q (𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 5 (∀E: P8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ *f* **P**) ,! 10 (∀E: C5.2) ¡

ω[**n**] & ℿ[**n**,**P**] ⇒ *f* **P** ,! 11 (()E: 10) ¡

f **P** ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

ω[**m**] & *f* **P** ,! 13 (&I: 4,12) ¡

(ω[**m**] & *f* **P** ⇒ ∃Q (ℿ[**m**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 14 (∀E: P17) ¡

ω[**m**] & *f* **P** ⇒ ∃Q (ℿ[**m**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 15 (()E: 14) ¡

∃Q (ℿ[**m**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(ℿ[**m**,**Q**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 17 (∃E: 16) ¡

ℿ[**m**,**Q**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 18 (()E: 17) ¡

ℿ[**n**,**P**] & ℿ[**m**,**Q**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 19 (&I: 8,18) ¡

(ℿ[**n**,**P**] & ℿ[**m**,**Q**] & (**P** ∩ **Q**) ≡ ϕ) ,! 20 (()I: 19) ¡

∃Q (ℿ[**n**,**P**] & ℿ[**m**,Q] & (**P** ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 21 (∃I: 20) ¡

∃P∃Q (ℿ[**n**,P] & ℿ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 22 (∃I: 21) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (ℿ[**n**,P] & ℿ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (ℿ[**n**,P] & ℿ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃P∃Q (ℿ[n,P] & ℿ[m,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∀P∃Q (ℿ[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))) ¡

! We use induction, taking *ϕ* to be
∀P∃Q (ℿ[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
It must be proven that
∀P∃Q (ℿ[0,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀P∃Q (ℿ[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
⇒ ∀P∃Q (ℿ[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))). ¡

! To prove:
∀P∃Q (ℿ[0,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

ϕ ⊆ **P** ,! 2 (∀E: II5.9) ¡

P ⊆ ϕ ∨ ϕ ⊆ **P** ,! 3 (∨I: 2) ¡

(**P** ⊆ ϕ ∨ ϕ ⊆ **P**) ,! 4 (()I: 3) ¡

♑[0,ϕ] & (**P** ⊆ ϕ ∨ ϕ ⊆ **P**) ,! 5 (&I: C3.14,4) ¡

(♑[0,ϕ] & (**P** ⊆ ϕ ∨ ϕ ⊆ **P**)) ,! 6 (()I: 5) ¡

∃Q (♑[0,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 7 (∃I: 6) ¡

∀P∃Q (♑[0,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)) ,! 8 (∀I: 1,7) ¡

! To prove:
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀P∃Q (♑[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
⇒ ∀P∃Q (♑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))) ¡

n,**m** ,! 9 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀P∃Q (♑[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 10 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 11 (&E: 10) ¡

ω[**n**] ,! 12 (&E: 10) ¡

∀P∃Q (♑[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)) ,! 13 (&E: 10) ¡

P ,! 14 (Prem) ¡

∃Q (♑[**n**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 15 (∀E: 13) ¡

(♑[**n**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**)) ,! 16 (∃E: 15) ¡

♑[**n**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**) ,! 17 (()E: 16) ¡

♑[**n**,**Q**] ,! 18 (&E: 17) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ♑[**n**,**Q**] ,! 19 (&I: 11,18) ¡

(**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**) ,! 20 (&E: 17) ¡

P ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P** ,! 21 (()E: 20) ¡

P ⊆ **Q** ,! 22 (Prem) ¡

ω[**n**] & ♑[**n**,**Q**] ,! 23 (&I: 12,18) ¡

(ω[**n**] & ♑[**n**,**Q**] ⇒ ∃x ¬ **Q**[x]) ,! 24 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] & ♑[**n**,**Q**] ⇒ ∃x ¬ **Q**[x] ,! 25 (()E: 24) ¡

∃x ¬ **Q**[x] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

$\neg$ **Q**[**a**] ,! 27 ($\exists$E: 26) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & $\neg$ **Q**[**a**] & ℼ[**n**,**Q**] ,! 28 (&I: 19,27) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & $\neg$ **Q**[**a**] & ℼ[**n**,**Q**] $\Rightarrow$ ℼ[**m**,(**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))]⊏)
,! 29 ($\forall$E C2.12) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & $\neg$ **Q**[**a**] & ℼ[**n**,**Q**] $\Rightarrow$ ℼ[**m**,(**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))]
,! 30 (()E: 29) ¡

ℼ[**m**,(**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))] ,! 31 ($\Rightarrow$E: 28,30) ¡

(**P** $\subseteq$ **Q** $\Rightarrow$ **P** $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))) ,! 32 ($\forall$E: II2.21) ¡

P $\subseteq$ **Q** $\Rightarrow$ **P** $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) ,! 33 (()E: 32) ¡

P $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) ,! 34 ($\Rightarrow$E: 22,33) ¡

P $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\vee$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\subseteq$ **P** ,! 35 ($\vee$I: 34) ¡

(**P** $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\vee$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\subseteq$ **P**)
,! 36 (()I: 35) ¡

ℼ[**m**,(**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))] & (**P** $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\vee$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\subseteq$ **P**)
,! 37 (&I: 31,36) ¡

(ℼ[**m**,(**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$))]
& (**P** $\subseteq$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\vee$ (**Q** $\cup$ (**a**$^\bullet$)) $\subseteq$ **P**))
,! 38 (()I: 37) ¡

$\exists$Q (ℼ[**m**,Q] & (**P** $\subseteq$ Q $\vee$ Q $\subseteq$ **P**)) ,! 39 ($\exists$I: 38) ¡

P $\subseteq$ **Q** $\Rightarrow$ $\exists$Q (ℼ[**m**,Q] & (**P** $\subseteq$ Q $\vee$ Q $\subseteq$ **P**))
,! 40 ($\Rightarrow$I: 22,39) ¡

Q $\subseteq$ **P** ,! 41 (Prem) ¡

(**Q** $\subseteq$ **P** $\Rightarrow$ **Q** $\equiv$ **P** $\vee$ **Q** $\subset$ **P**) ,! 42 ($\forall$E: II1.55) ¡

Q $\subseteq$ **P** $\Rightarrow$ **Q** $\equiv$ **P** $\vee$ **Q** $\subset$ **P** ,! 43 (()E: 42) ¡

Q $\equiv$ **P** $\vee$ **Q** $\subset$ **P** ,! 44 ($\Rightarrow$E: 41,43) ¡

Q $\equiv$ **P** ,! 45 (Prem) ¡

(**Q** $\equiv$ **P** $\Rightarrow$ **P** $\subseteq$ **Q**) ,! 46 ($\forall$E: II1.12) ¡

Q $\equiv$ **P** $\Rightarrow$ **P** $\subseteq$ **Q** ,! 47 (()E: 46) ¡

P $\subseteq$ **Q** ,! 48 ($\Rightarrow$E: 45,47) ¡

! Back in the case of **P** $\subseteq$ **Q**, which has just been shown... ¡

$\exists Q\ (\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},Q]\ \&\ (\mathbf{P} \subseteq Q \vee Q \subseteq \mathbf{P})\ )$
,! 49 (⇒E: 40,48) ¡

$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \Rightarrow \exists Q\ (\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},Q]\ \&\ (\mathbf{P} \subseteq Q \vee Q \subseteq \mathbf{P})\ )$
,! 50 (⇒I: 45,49) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$,! 51 (Prem) ¡

$(\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists a\ (\neg\ \mathbf{Q}[a]\ \&\ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})\ )$
,! 52 (∀E: II8.38) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists a\ (\neg\ \mathbf{Q}[a]\ \&\ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$
,! 53 (()E: 52) ¡

$\exists a\ (\neg\ \mathbf{Q}[a]\ \&\ (\mathbf{Q} \cup (a^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$,! 54 (⇒E: 51,53) ¡

$(\neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$,! 55 (∃E: 54) ¡

$\neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$,! 56 (()E: 55) ¡

$\neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]$,! 57 (&E: 56) ¡

$(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$,! 58 (&E: 56) ¡

$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \vee (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P}$
,! 59 (∨I: 58) ¡

$(\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \vee (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$
,! 60 (()I: 59) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}]$
,! 61 (&I: 19,57) ¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}]$
$\Rightarrow \mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]\ )$
,! 62 (∀E: C2.12) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}]\ \&\ \neg\ \mathbf{Q}[\mathbf{a}]\ \&\ \mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{Q}] \Rightarrow \mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]$
,! 63 (()E: 62) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]$,! 64 (⇒E: 61,63) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]\ \&\ (\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \vee (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})$
,! 65 (&I: 60,64) ¡

$(\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]$
$\&\ (\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \vee (\mathbf{Q} \cup (\mathbf{a}^{\bullet})) \subseteq \mathbf{P})\ )$
,! 66 (()I: 65) ¡

$\exists Q\ (\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},Q]\ \&\ (\mathbf{P} \subseteq Q \vee Q \subseteq \mathbf{P})\ )$
,! 67 (∃I: 66) ¡

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \exists Q\ (\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},Q]\ \&\ (\mathbf{P} \subseteq Q \vee Q \subseteq \mathbf{P})\ )$

,! 68 (⇒I: 51,67) ¡

∃Q (℩[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 69 (∨E: 44,50,68) ¡

Q ⊆ **P** ⇒ ∃Q (℩[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**))
,! 70 (⇒I: 41,69) ¡

∃Q (℩[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 71 (∨E: 21,40,70) ¡

∀P∃Q (℩[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)) ,! 72 (∀I: 14,71) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀P∃Q (℩[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
⇒ ∀P∃Q (℩[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 73 (⇒I: 10,72) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ∀P∃Q (℩[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
⇒ ∀P∃Q (℩[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 74 (()I: 73) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] & ∀P∃Q (℩[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
⇒ ∀P∃Q (℩[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))
,! 75 (∀I: 9,74) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∀P∃Q (℩[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))
! 76 (Induct: 8,75) ¡

□

! **20.** ¡

⊢ ∀n∀P (ω[n] ⇒ ∃Q (℩[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))) ¡

n,**P** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∀P∃Q (℩[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))
,! 3 (∀E: P19) ¡

ω[**n**] ⇒ ∀P∃Q (℩[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 4 (()E: 3) ¡

∀P∃Q (℩[**n**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃Q (℩[**n**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 6 (∀E: 5) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃Q (℩[**n**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**))
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃Q (℩[**n**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)))
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀P (ω[n] ⇒ ∃Q (𝔑[n,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))
! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **21.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∃P∃Q (𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 5 (∀E: P8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 6 (()E: 5) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 8 (∃E: 7) ¡

(ω[**m**] ⇒ ∃Q (𝔑[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)))
,! 9 (∀E: P20) ¡

ω[**m**] ⇒ ∃Q (𝔑[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**))
,! 10 (()E: 9) ¡

∃Q (𝔑[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**)) ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

(𝔑[**m**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**)) ,! 12 (∃E: 11) ¡

𝔑[**m**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**) ,! 13 (()E: 12) ¡

𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**) ,! 14 (&I: 8,13) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,**Q**] & (**P** ⊆ **Q** ∨ **Q** ⊆ **P**))
,! 15 (()I: 14) ¡

∃Q (𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,Q] & (**P** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **P**))
,! 16 (∃I: 15) ¡

∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 17 (∃I: 16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))
,! 19 (()I: 18) ¡

$\forall n \forall m$ ($\omega[n]$ & $\omega[m]$

$\Rightarrow \exists P \exists Q$ (ℕ[n,P] & ℕ[m,Q] & ($P \subseteq Q \vee Q \subseteq P$)))

! 20 ($\forall$I: 1,19) ¡

□