!CHAPTER 8

SUCCESSORS¡

! This chapter concerns the successor relationship and has several objectives. First, it will be shown that the Pre-Addition Peano Axioms can be proven, and indeed rely on the number axioms of the second chapter. Secondly, it will be established that the successor relationship restricted to the domain of finite numbers is functional, and so a successor operator may be and is, at P12, defined. Thirdly, propositions about this successor operator, including new versions of the Peano Axioms, will be then shown. ¡

! The Pre-Addition Peano Axioms are important because they are the basis of the most well-known system of arithmetic. They are:

(PA1) $\omega[0]$
(PA2) $\forall n\ (\ \omega[n]\ \&\ \sigma[n,m] \Rightarrow \omega[m]\ )$
(PA3) $\forall n\ (\ \omega[n] \Rightarrow \exists m\ \sigma[n,m]\ )$
(PA4) $\forall n \forall m \forall k\ (\ \omega[n]\ \&\ \sigma[n,m]\ \&\ \sigma[n,k] \Rightarrow m = k\ )$
(PA5) $\forall n \forall m \forall k\ (\ \omega[n]\ \&\ \omega[k]\ \&\ \sigma[n,m]\ \&\ \sigma[k,m] \Rightarrow n = k\ )$
(PA6) $\forall n\ (\ \omega[n] \Rightarrow \neg\ \sigma[n,0]\ )$
(PA7) Induction

(PA1) is just the axiom $\omega 0$, and Induction is the rule of inference Induct. The others remain to be shown. ¡

! P1 is useful as a lemma for the third Peano Axiom, as well as other propositions. It is also interesting, in that it establishes conditions from which $\sigma[n,m]$ may be concluded. ¡

! **1.** ¡

$\vdash \forall n \forall m \forall P \forall a\ (\ \omega[n]\ \&\ \omega[m]\ \&\ \mathfrak{N}[n,P]\ \&\ \mathfrak{N}[m,(P \cup (a^{\bullet}))]\ \&\ \neg\ P[a]$
$\Rightarrow \sigma[n,m]\ )$ ¡

n, **m**, **P**, **a** ,! 1 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ \mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}]\ \&\ \mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]\ \&\ \neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$
,! 2 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]$,! 3 (&E: 2) ¡

$\omega[\mathbf{m}]$,! 4 (&E: 2) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{n},\mathbf{P}]$,! 5 (&E: 2) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]$,! 6 (&E: 2) ¡

$\neg\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$,! 7 (&E: 2) ¡

$(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[\mathbf{a}]$,! 8 (∀E: II8.32) ¡

$\exists a\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[a]$,! 9 (∃I: 8) ¡

$\mathfrak{N}[\mathbf{m},(\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))]\ \&\ \exists a\ (\mathbf{P} \cup (\mathbf{a}^{\bullet}))[a]$,! 10 (&I: 6,9) ¡

(ℿ[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ∃a (**P** ∪ (**a**•))[a] ⇒ ¬ **m** = 0)
,! 11 (∀E: C3.12) ¡

ℿ[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ∃a (**P** ∪ (**a**•))[a] ⇒ ¬ **m** = 0
,! 12 (()E: 11) ¡

¬ **m** = 0 ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ,! 14 (&I: 4,13) ¡

(ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]))
,! 15 (∀E: C1.15) ¡

ω[**m**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 16 (()E: 15) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(ω[**p**] & σ[**p**,**m**]) ,! 18 (∃E: 17) ¡

ω[**p**] & σ[**p**,**m**] ,! 19 (()E: 18) ¡

ω[**p**] & σ[**p**,**m**] & (**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 20 (&I: 8,19) ¡

ω[**p**] & σ[**p**,**m**] & (**P** ∪ (**a**•))[**a**] & ℿ[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 21 (&I: 6,20) ¡

(ω[**p**] & σ[**p**,**m**] & (**P** ∪ (**a**•))[**a**] & ℿ[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
⇒ ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))])
,! 22 (∀E: C2.11) ¡

ω[**p**] & σ[**p**,**m**] & (**P** ∪ (**a**•))[**a**] & ℿ[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
⇒ ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))]
,! 23 (()E: 22) ¡

ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))] ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

ω[**p**] ,! 25 (&E: 19) ¡

ω[**p**] & ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))] ,! 26 (&I: 24,25) ¡

(¬ **P**[**a**] ⇒ **P** ≡ ((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))),! 27 (∀E: II8.59) ¡

¬ **P**[**a**] ⇒ **P** ≡ ((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•)) ,! 28 (()E: 27) ¡

P ≡ ((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•)) ,! 29 (⇒E: 7,28) ¡

ω[**p**] & ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))] & **P** ≡ ((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))
,! 30 (&I: 26,29) ¡

(ω[**p**] & ℿ[**p**,((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))] & **P** ≡ ((**P** ∪ (**a**•)) \ (**a**•))
⇒ ℿ[**p**,**P**]) ,! 31 (∀E: C4.6) ¡

ω[p] & 𝔑[p,((P ∪ (a•)) \ (a•))] & P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•))
⇒ 𝔑[p,P]
,! 32 (()E: 31) ¡

𝔑[p,P] ,! 33 (⇒E: 30.32) ¡

ω[n] & ω[p] ,! 34 (&I: 3,25) ¡

ω[n] & ω[p] & 𝔑[n,P] ,! 35 (&I: 5,34) ¡

ω[n] & ω[p] & 𝔑[n,P] & 𝔑[p,P] ,! 36 (&I: 33,35) ¡

(ω[n] & ω[p] & 𝔑[n,P] & 𝔑[p,P] ⇒ n = p)
,! 37 (∀E: C2.10) ¡

ω[n] & ω[p] & 𝔑[n,P] & 𝔑[p,P] ⇒ n = p
,! 38 (()E: 37) ¡

n = p ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

σ[p,m] ,! 40 (&E: 19) ¡

σ[n,m] ,! 41 (=E: 39,40) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a] ⇒ σ[n,m]
,! 42 (⇒I: 2,41) ¡

(ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a] ⇒ σ[n,m])
,! 43 (()I: 42) ¡

∀n∀m∀P∀a (ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a]
⇒ σ[n,m])
! 44 (∀I: 1,43) ¡

□

! **2.** ¡

! (PA2) Successors of finite numbers are finite numbers. ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ω[m]) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]))
,! 3 (∀E: C7.14) ¡

ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[**m**,(P ∪ (a•))])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃a (𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[a] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (a•))])
,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 9 (&E: 8) ¡

𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 10 (&E: 8) ¡

ω[**n**] ,! 11 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 12 (&I: 9,11) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))]))
,! 13 (∀E: C2.9) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 14 (()E: 13) ¡

∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(ω[**k**] & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 16 (∃E: 15) ¡

ω[**k**] & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 17 (()E: 16) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 18 (()I: 2) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) ,! 19 (∃I: 18) ¡

ω[**k**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 20 (&I: 17,19) ¡

ω[**k**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))]
& 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 21 (&I: 10,20) ¡

(ω[**k**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))]
& 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
⇒ **k** = **m**)
,! 22 (∀E: C2.5) ¡

ω[**k**] & ∃p(ω[p] & σ[p,**m**]) & 𝔑[**k**,(**P** ∪ (**a**•))]
& 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
⇒ **k** = **m**
,! 23 (()E: 22) ¡

k = **m** ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

ω[**k**] ,! 25 (&E: 17) ¡

ω[**m**] ,! 26 (=E: 24,25) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 27 (⇔E: 2,26) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ω[m]) ! 29 (∀I: 1,28) ¡

□

! **3.** (PA3) Every finite number has a successor. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃m σ[n,m]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 3 (∀E: C7.7) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃P (𝔑[**n**,P] & ¬ P[**a**]) ,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 9 (&I 2,8) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))]))
,! 10 (∀E: C2.9) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ ∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))])
,! 11 (()E: 10) ¡

∃m (ω[m] & 𝔑[m,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(ω[**m**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 13 (∃E: 12) ¡

ω[**m**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 14 (()E: 13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 15 (&I: 2,14) ¡

𝔑[**n**,**P**] ,! 16 (&E: 8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]
,! 17 (&I: 15,16) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 18 (&E: 8) ¡

ω[n] & ω[m] & ℿ[n,P] & ℿ[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a]
,! 19 (&I: 17,18) ¡

(ω[n] & ω[m] & ℿ[n,P] & ℿ[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a]
⇒ σ[n,m])
,! 20 (∀E: P1) ¡

ω[n] & ω[m] & ℿ[n,P] & ℿ[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a] ⇒ σ[n,m]
,! 21 (()E: 20) ¡

σ[n,m] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

∃m σ[n,m] ,! 23 (∃I: 22) ¡

ω[n] ⇒ ∃m σ[n,m] ,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(ω[n] ⇒ ∃m σ[n,m]) ,! 25 (()I: 24) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃m σ[n,m]) ! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **4.** (PA4) The successor relationship is functional for finite numbers. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & σ[n,m] & σ[n,k] ⇒ m = k) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] & σ[n,k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & σ[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[n] ,! 4 (&E: 2) ¡

σ[n,k] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[n] & σ[n,k] ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(ω[n] & σ[n,m] ⇒ ω[m]) ,! 7 (∀E: P2) ¡

ω[n] & σ[n,m] ⇒ ω[m] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[m] ,! 9 (⇒E: 3,8) ¡

(ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (ℿ[n,P] & ¬ P[a] & ℿ[m,(P ∪ (a•))]))
,! 10 (∀E: C7.14) ¡

ω[n] & σ[n,m]
⇒ ∃P∃a (ℿ[n,P] & ¬ P[a] & ℿ[m,(P ∪ (a•))])
,! 11 (()E: 10) ¡

∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
,! 12 (⇒E: 3,11) ¡

∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))])
,! 13 (∃E: 12) ¡

(𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]) ,! 14 (∃E: 13) ¡

𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 15 (()E: 14) ¡

𝔑[n,P] ,! 16 (&E: 15) ¡

¬ P[a] ,! 17 (&E: 15) ¡

𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 18 (&E: 15) ¡

ω[m] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 19 (&I: 9,18) ¡

(ω[n] & σ[n,k]) ,! 20 (()I: 6) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,k]) ,! 21 (∃E: 20) ¡

ω[m] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
,! 22 (&I: 19,21) ¡

ω[n] & σ[n,k] & ¬ P[a] ,! 23 (&I: 6,17) ¡

ω[n] & σ[n,k] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ,! 24 (&I: 16,23) ¡

(ω[n] & σ[n,k] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ⇒ 𝔑[k,(P ∪ (a•))])
,! 25 (∀E: C2.12) ¡

ω[n] & σ[n,k] & ¬ P[a] & 𝔑[n,P] ⇒ 𝔑[k,(P ∪ (a•))]
,! 26 (()E: 25) ¡

𝔑[k,(P ∪ (a•))] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

ω[m] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
& 𝔑[k,(P ∪ (a•))]
,! 28 (&I: 22,27) ¡

(ω[m] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
& 𝔑[k,(P ∪ (a•))]
⇒ m = k)
,! 29 (∀E: C2.5) ¡

ω[m] & ∃p(ω[p] & σ[p,k]) & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
& 𝔑[k,(P ∪ (a•))]
⇒ m = k
,! 30 (()E: 29) ¡

m = k ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & σ[**n**,**k**] ⇒ **m** = **k** ,! 32 (⇒I: 2,31) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & σ[**n**,**k**] ⇒ **m** = **k**) ,! 33 (()I: 32) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & σ[n,m] & σ[n,k] ⇒ m = k)
! 34 (∀I: 1,33) ¡

▯

! **5.** (PA5) The successor relationship is one-to-one for finite numbers. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & σ[n,m] & σ[k,m] ⇒ n = k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] & σ[**n**,**m**] & σ[**k**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 5 (&E: 2) ¡

σ[**k**,**m**] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & σ[**k**,**m**] ,! 7 (&I: 4,6) ¡

(**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 8 (∀E: II8.32) ¡

ω[**k**] & σ[**k**,**m**] & (**P** ∪ (**a**•))[**a**] ,! 9 (&I: 7,8) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 10 (&I: 3,5) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
⇒ ∃P∃a (♏[**n**,P] & ¬ P[a] & ♏[**m**,(P ∪ (a•))]))
,! 11 (∀E: C7.14) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
⇒ ∃P∃a (♏[**n**,P] & ¬ P[a] & ♏[**m**,(P ∪ (a•))])
,! 12 (()E: 11) ¡

∃P∃a (♏[**n**,P] & ¬ P[a] & ♏[**m**,(P ∪ (a•))])
,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∃a (♏[**n**,**P**] & ¬ **P**[a] & ♏[**m**,(**P** ∪ (a•))])
,! 14 (∃E: 13) ¡

(♏[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & ♏[**m**,(**P** ∪ (**a**•))]) ,! 15 (∃E: 14) ¡

♏[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & ♏[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 16 (()E: 15) ¡

♏[**n**,**P**] ,! 17 (&E: 16) ¡

¬ P[a] ,! 18 (&E: 16) ¡

𝔑[m,(P ∪ (a•))] ,! 19 (&E: 16) ¡

ω[k] & σ[k,m] & (P ∪ (a•))[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
,! 20 (&I: 9,19) ¡

(ω[k] & σ[k,m] & (P ∪ (a•))[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
⇒ 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))])
,! 21 (∀E: C2.11) ¡

ω[k] & σ[k,m] & (P ∪ (a•))[a] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))]
⇒ 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))]
,! 22 (()E: 21) ¡

𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))] ,! 24 (&I: 4,23) ¡

(¬ P[a] ⇒ P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•))),! 25 (∀E: II8.59) ¡

¬ P[a] ⇒ P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•)) ,! 26 (()E: 25) ¡

P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•)) ,! 27 (⇒E: 18,26) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))] & P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•))
,! 28 (&I: 24,27) ¡

(ω[k] & 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))] & P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•))
⇒ 𝔑[k,P]) ,! 29 (∀E: C4.6) ¡

ω[k] & 𝔑[k,((P ∪ (a•)) \ (a•))] & P ≡ ((P ∪ (a•)) \ (a•))
⇒ 𝔑[k,P]
,! 30 (()E: 29) ¡

𝔑[k,P] ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

ω[n] & ω[k] ,! 32 (&I: 3,4) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] ,! 33 (&I: 17,32) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & 𝔑[k,P] ,! 34 (&I: 31,33) ¡

(ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & 𝔑[k,P] ⇒ n = k)
,! 35 (∀E: C2.10) ¡

ω[n] & ω[k] & 𝔑[n,P] & 𝔑[k,P] ⇒ n = k
,! 36 (()E: 35) ¡

n = k ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

ω[n] & ω[k] & σ[n,m] & σ[k,m] ⇒ n = k ,! 38 (⇒I: 2,37) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] & σ[**n**,**m**] & σ[**k**,**m**] ⇒ **n** = **k**)
,! 39 (()I: 38) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[k] & σ[n,m] & σ[k,m] ⇒ n = k)
! 40 (∀I: 1,39) ¡

▯

! **6.** (PA6) No finite number is the predecessor of 0. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ¬ σ[n,0]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

σ[**n**,0] ,! 3 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,0] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,0] ⇒ ∃P∃a 𝔑[0,(P ∪ (a•))])
,! 5 (∀E: C7.15) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,0] ⇒ ∃P∃a 𝔑[0,(P ∪ (a•))]
,! 6 (()E: 5) ¡

∃P∃a 𝔑[0,(P ∪ (a•))] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∃a 𝔑[0,(**P** ∪ (a•))] ,! 8 (∃E: 7) ¡

𝔑[0,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 9 (∃E: 8) ¡

(𝔑[0,(**P** ∪ (**a**•))] ⇒ (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ϕ)
,! 10 (∀E: C3.1) ¡

𝔑[0,(**P** ∪ (**a**•))] ⇒ (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 11 (()E: 10) ¡

(**P** ∪ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

¬ (**P** ∪ (**a**•)) ≡ ϕ ,! 13 (∀E: II8.37) ¡

𝔉 ,! 14 (𝔉I: 12,13) ¡

σ[**n**,0] ⇒ 𝔉 ,! 15 (⇒I: 3,14) ¡

¬ σ[**n**,0] ,! 16 (¬I: 15) ¡

ω[**n**] ⇒ ¬ σ[**n**,0] ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[**n**] ⇒ ¬ σ[**n**,0]) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ¬ σ[n,0]) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! P7 through P11 prepare us for the definition of the successor operator (P12). ¡

! **7.** ¡

⊦ ∀x (∃y (σ ⌈ ω)[x,y] ⇔ ω[x]) ¡

x ,! 1 (Prem) ¡

∃y (σ ⌈ ω)[**x**,y] ,! 2 (Prem) ¡

(σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ,! 3 (∃E: 2) ¡

((σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ⇒ ω[**x**]) ,! 4 (∀E: III7.6) ¡

(σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ⇒ ω[**x**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**x**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃y (σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ⇒ ω[**x**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

ω[**x**] ,! 8 (Prem) ¡

(ω[**x**] ⇒ ∃m σ[**x**,m]) ,! 9 (∀E: P3) ¡

ω[**x**] ⇒ ∃m σ[**x**,m] ,! 10 (()E: 9) ¡

∃m σ[**x**,m] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

σ[**x**,**y**] ,! 12 (∃E: 11) ¡

σ[**x**,**y**] & ω[**x**] ,! 13 (&I: 8,12) ¡

(σ[**x**,**y**] & ω[**x**] ⇒ (σ ⌈ ω)[**x**,**y**]) ,! 14 (∀E: III7.4) ¡

σ[**x**,**y**] & ω[**x**] ⇒ (σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ,! 15 (()E: 14) ¡

(σ ⌈ ω)[**x**,**y**] ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

∃y (σ ⌈ ω)[**x**,y] ,! 17 (∃I: 16) ¡

ω[**x**] ⇒ ∃y (σ ⌈ ω)[**x**,y] ,! 18 (⇒I: 8,17) ¡

∃y (σ ⌈ ω)[**x**,y] ⇔ ω[**x**] ,! 19 (⇔I: 7,18) ¡

(∃y (σ ⌈ ω)[**x**,y] ⇔ ω[**x**]) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀x (∃y (σ ⌈ ω)[x,y] ⇔ ω[x]) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω ¡

(∀x (∃y (σ⌈ ω)[x,y] ⇔ ω[x]) ⇒ ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω)
,! 1 (∀E: III5.13) ¡

∀x (∃y (σ⌈ ω)[x,y] ⇔ ω[x]) ⇒ ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω
,! 2 (()E: 1) ¡

((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω ! 3 (⇒E: P7,2) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀x∀y∀z ((σ⌈ ω)[x,y] & (σ⌈ ω)[x,z] ⇒ y = z) ¡

x,**y**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**y**] & (σ⌈ ω)[**x**,**z**] ,! 2 (Prem) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**y**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**z**] ,! 4 (&E: 2) ¡

((σ⌈ ω)[**x**,**y**] ⇒ σ[**x**,**y**] & ω[**x**]) ,! 5 (∀E: III7.3) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**y**] ⇒ σ[**x**,**y**] & ω[**x**] ,! 6 (()E: 5) ¡

σ[**x**,**y**] & ω[**x**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

σ[**x**,**y**] ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[**x**] ,! 9 (&E: 7) ¡

ω[**x**] & σ[**x**,**y**] ,! 10 (&I: 8,9) ¡

((σ⌈ ω)[**x**,**z**] ⇒ σ[**x**,**z**] & ω[**x**]) ,! 11 (∀E: III7.3) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**z**] ⇒ σ[**x**,**z**] & ω[**x**] ,! 12 (()E: 11) ¡

σ[**x**,**z**] & ω[**x**] ,! 13 (⇒E: 4,12) ¡

σ[**x**,**z**] ,! 14 (&E: 13) ¡

ω[**x**] & σ[**x**,**y**] & σ[**x**,**z**] ,! 15 (&I: 10,13) ¡

(ω[**x**] & σ[**x**,**y**] & σ[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**) ,! 16 (∀E: P4) ¡

ω[**x**] & σ[**x**,**y**] & σ[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 17 (()E: 16) ¡

y = **z** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(σ⌈ ω)[**x**,**y**] & (σ⌈ ω)[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z** ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

((σ⌈ ω)[**x**,**y**] & (σ⌈ ω)[**x**,**z**] ⇒ **y** = **z**),! 20 (()I: 19) ¡

∀x∀y∀z ((σ⌈ ω)[x,y] & (σ⌈ ω)[x,z] ⇒ y = z)
! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ **f** (σ⌈ ω) ¡

f (σ⌈ ω) ! 1 (𝕊I: III8.1,P9)
¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ **f** (σ⌈ ω) & ((σ⌈ ω)^{D})[n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω ,! 3 (&I: P8,2) ¡

(ω[**n**] & ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω ⇒ ((σ⌈ ω)^{D})[**n**])
,! 4 (∀E: II1.36) ¡

ω[**n**] & ((σ⌈ ω)^{D}) ≡ ω ⇒ ((σ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 5 (()E: 4) ¡

((σ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

f (σ⌈ ω) & ((σ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 7 (&I: P10,6) ¡

ω[**n**] ⇒ **f** (σ⌈ ω) & ((σ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] ⇒ **f** (σ⌈ ω) & ((σ⌈ ω)^{D})[**n**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n (ω[n] ⇒ **f** (σ⌈ ω) & ((σ⌈ ω)^{D})[n]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **12.** ¡

𝔻 ' ; (**n**') ; ω[**n**] ; ((σ⌈ ω)´**n**) ¡! (𝔻D: III8.20,P11)
¡

! **13.** P13 is the only proposition which appeals to P12 using the 𝔻I rule. Subsequently, only the 𝔻P rule will be used. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ σ[n,(n')]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ **f** (σ ⌈ ω) & ((σ ⌈ ω)^{D})[**n**]) ,! 3 (∀E: P11) ¡

ω[**n**] ⇒ **f** (σ ⌈ ω) & ((σ ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 4 (()E: 3) ¡

f (σ ⌈ ω) & ((σ ⌈ ω)^{D})[**n**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,((σ ⌈ ω)´**n**)] ,! 6 (𝕋I: III8.20,5) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,(**n**')] ,! 7 (𝔻I: P12,2,6) ¡

((σ ⌈ ω)[**n**,(**n**')] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 8 (∀E: III7.5; (**n**'): P12,2) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,(**n**')] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 9 (()E: 8) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n (ω[n] ⇒ σ[n,(n')]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P14 through P20 connect the successor operator with the successor relationship. ¡

! **14.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n') = m ⇒ ω[n] & σ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (𝔻P: P12,2) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 4 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 5 (()E: 4) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m ((n') = m ⇒ ω[n] & σ[n,m]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀m (m = (n') ⇒ ω[n] & σ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**n**') ,! 2 (Prem) ¡

m = **m** ,! 3 (=I) ¡

(**n**') = **m** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 5 (∀E: P14) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

m = (**n**') ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**m** = (**n**') ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m (m = (n') ⇒ ω[n] & σ[n,m]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀n∀m ((n') = m ⇒ σ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = **m** ,! 2 (Prem) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 3 (∀E: P14) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

(**n**') = **m** ⇒ σ[**n**,**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**n**') = **m** ⇒ σ[**n**,**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m ((n') = m ⇒ σ[n,m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀n∀m (m = (n') ⇒ σ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**n**') ,! 2 (Prem) ¡

(**m** = (**n**') ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 3 (∀E: P15) ¡

m = (**n**') ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

m = (**n**') ⇒ σ[**n**,**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(**m** = (**n**') ⇒ σ[**n**,**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (m = (n') ⇒ σ[n,m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **18.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n') = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 4 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 5 (()E: 4) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**n**,**m**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m**)
,! 8 (∀E: P4;
(**n**'): P12,3) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 9 (()E: 8) ¡

(**n**') = **m** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n') = m) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **19.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n')) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m**) ,! 3 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n**') = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

m = **m** ,! 6 (=I) ¡

m = (**n**') ,! 7 (=E: 5,6) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n**') ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n**')) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n')) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **20.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n') = m ⇔ (σ ⌈ ω)[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

((σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ⇔ σ[**n**,**m**] & ω[**n**]) ,! 2 (∀E: III7.2) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ⇔ σ[**n**,**m**] & ω[**n**] ,! 3 (()E: 2) ¡

(**n**') = **m** ,! 4 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 5 (ⅅP: P12,4) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**]) ,! 6 (∀E: P14) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

ω[**n**] ,! 9 (&E: 8) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 10 (&E: 8) ¡

σ[**n**,**m**] & ω[**n**] ,! 11 (&I: 9,10) ¡

σ[**n**,**m**] & ω[**n**] ⇒ (σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ,! 12 (⇔E: 3) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ,! 13 (⇒E: 11,12) ¡

(**n**') = **m** ⇒ (σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ,! 14 (⇒I: 4,13) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ,! 15 (Prem) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ⇒ σ[**n**,**m**] & ω[**n**] ,! 16 (⇔E: 3) ¡

σ[**n**,**m**] & ω[**n**] ,! 17 (⇒E: 15,16) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 18 (&E: 17) ¡

ω[**n**] ,! 19 (&E: 17) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 20 (&I: 18,19) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m**) ,! 21 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 22 (()E: 21) ¡

(**n**') = **m** ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

(σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 24 (⇒I: 15,23) ¡

(**n**') = **m** ⇔ (σ ⌈ ω)[**n**,**m**] ,! 25 (⇔I: 14,24) ¡

((**n**') = **m** ⇔ (σ ⌈ ω)[**n**,**m**]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀n∀m ((n') = m ⇔ (σ ⌈ ω)[n,m]) ! 27 (∀I: 1,26) ¡

▯

! **21.** P20 is the operator version of P1. ¡

⊢ ∀n∀m∀P∀a (ω[n] & ω[m] & ♏[n,P] & ♏[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a]
⇒ (n') = m)
¡

n,**m**,**P**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ♏[**n**,**P**] & ♏[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**]
,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ♏[**n**,**P**] & ♏[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**]
⇒ σ[**n**,**m**])
,! 3 (∀E: P1) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ♏[**n**,**P**] & ♏[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**] ⇒ σ[**n**,**m**]
,! 4 (()E: 3) ¡

σ[**n**,**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] ,! 6 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 7 (&I: 5,6) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m**) ,! 8 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ (**n**') = **m** ,! 9 (()E: 8) ¡

(**n**') = **m** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**] ⇒ (**n**') = **m**
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**m**,(**P** ∪ (**a**•))] & ¬ **P**[**a**]
⇒ (**n**') = **m**)
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀P∀a (ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,(P ∪ (a•))] & ¬ P[a]
⇒ (n') = m)
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **22.** P22 is the operator version of C2.12. ¡

⊢ ∀n∀P∀a (ω[n] & 𝔑[n,P] & ¬ P[a] ⇒ 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))]) ¡

n,**P**,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **P**[**a**] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 7 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 8 (()E: 7) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 9 (⇒E: 4,8) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 10 (&I: 6,9) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**]
⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))])
,! 11 (∀E: C2.12;
(**n**'): P12,4) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[**n**,**P**] ⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))]
,! 12 (()E: 11) ¡

𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))]
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))])
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀P∀a (ω[n] & 𝔑[n,P] & ¬ P[a] ⇒ 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))])
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **23.** P23 is the operator version of C7.14. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))])) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 3 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 4 (()E: 3) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] ,! 6 (&I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')]
⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))]))
,! 7 (∀E: C7.14;
(**n**'): P12,2) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')]
⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))])
,! 8 (()E: 7) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))])
,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))])
,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))]))
,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a (𝔑[n,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))]))
! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **24.** P24 is the operator version of C7.15. ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))]))
,! 3 (∀E: P23) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))])
,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a] & 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃a (𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[a] & 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (a•))])
,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a•**))])
,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] & 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a•**))]
,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a•**))] ,! 9 (&E: 8) ¡

∃a 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (a•))] ,! 10 (∃I: 9) ¡

∃P∃a 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))] ,! 11 (∃I: 10) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a 𝔑[(**n**'),(P ∪ (a•))]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ∃P∃a 𝔑[(n'),(P ∪ (a•))]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! P25 through P27 present operator versions of (PA2). ¡

! **25.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ ω[(n')]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')]) ,! 3 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] ⇒ σ[**n**,(**n**')] ,! 4 (()E: 3) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] ,! 6 (&I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] ⇒ ω[(**n**')]) ,! 7 (∀E: P2;
(**n**'): P12,2) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,(**n**')] ⇒ ω[(**n**')] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[(**n**')] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ⇒ ω[(**n**')] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] ⇒ ω[(**n**')]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ω[(n')]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **26.** ¡

⊢ ∀n∀m ((n') = m ⇒ ω[m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (ⅅP: P12,2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ω[(**n**')]) ,! 4 (∀E: P25) ¡

ω[**n**] ⇒ ω[(**n**')] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(**n**')] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**m**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**m**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**m**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m ((n') = m ⇒ ω[m]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **27.** ¡

⊢ ∀n∀m (m = (n') ⇒ ω[m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**n**') ,! 2 (Prem) ¡

m = **m** ,! 3 (=I) ¡

(**n**') = **m** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**n**') = **m** ⇒ ω[**m**]) ,! 5 (∀E: P26) ¡

(**n**') = **m** ⇒ ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

m = (**n**') ⇒ ω[**m**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**m** = (**n**') ⇒ ω[**m**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m (m = (n') ⇒ ω[m]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! P28 and P30 are operator versions of (PA4). ¡

! **28.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & n = m ⇒ (n') = (m')) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & **n** = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

n = **m** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**n**') = (**n**') ,! 5 (=I; (**n**'): P12,3) ¡

(**n**') = (**m**') ,! 6 (=E: 4,5) ¡

ω[**n**] & **n** = **m** ⇒ (**n**') = (**m**') ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & **n** = **m** ⇒ (**n**') = (**m**')) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (ω[n] & n = m ⇒ (n') = (m')) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **29.** In P28 the assumption ω[n] is not superfluous, and by itself n = m does not imply (n') = (m'). In line 5 of the proof, ω[**n**] is invoked to assert the line (**n**') = (**n**'). Indeed, if n is not a natural number, (n') will not be defined, and so ¬ (n') = x no matter what term is substituted for x. ¡

⊢ ∀n∀m (¬ ω[n] & n = m ⇒ ¬ (n') = (m')) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ω[**n**] & **n** = **m** ,! 2 (Prem) ¡

¬ ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(**n**') = (**m**') ,! 4 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 5 (𝔻P: P12,4) ¡

𝔉 ,! 6 (𝔉I: 3,5) ¡

(**n**') = (**m**') ⇒ 𝔉 ,! 7 (⇒I: 4,6) ¡

¬ (**n**') = (**m**') ,! 8 (¬I: 7) ¡

¬ ω[n] & n = m ⇒ ¬ (n') = (m') ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ ω[n] & n = m ⇒ ¬ (n') = (m')) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (¬ ω[n] & n = m ⇒ ¬ (n') = (m')) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! Of course n = m is not necessary in P29's antecedent, and in the consequent (m') could have been replaced by any term. That is to say, it is provable that:

∀n∀x (¬ ω[n] ⇒ ¬ (n') = x) ¡

! **30.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & n = m ⇒ (m') = (n')) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & n = m ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & n = m ⇒ (n') = (m')) ,! 3 (∀E: P28) ¡

ω[n] & n = m ⇒ (n') = (m') ,! 4 (()E: 3) ¡

(n') = (m') ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(n') = (n') ,! 6 (=E: 5.5) ¡

(m') = (n') ,! 7 (=E: 5,6) ¡

ω[n] & n = m ⇒ (m') = (n') ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[n] & n = m ⇒ (m') = (n')) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m (ω[n] & n = m ⇒ (m') = (n')) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **31.** P31 is an operator version of (PA5). ¡

⊦ ∀n∀m ((n') = (m') ⇒ n = m) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

(n') = (m') ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] ,! 3 (𝔻P: P12,2) ¡

ω[m] ,! 4 (𝔻P: P12,2) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(ω[n] ⇒ σ[n,(n')]) ,! 6 (∀E: P13) ¡

ω[n] ⇒ σ[n,(n')] ,! 7 (()E: 6) ¡

σ[**n**,(**n**')] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & σ[**n**,(**n**')] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

((**n**') = (**m**') ⇒ σ[**m**,(**n**')]) ,! 10 (∀E: P17; (**n**'): P12,3) ¡

(**n**') = (**m**') ⇒ σ[**m**,(**n**')] ,! 11 (()E: 10) ¡

σ[**m**,(**n**')] ,! 12 (⇒E: 2,11) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**m**,(**n**')] ,! 13 (&I: 9,12) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**m**,(**n**')] ⇒ **n** = **m**) ,! 14 (∀E P5; (**n**'): P12,3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & σ[**n**,(**n**')] & σ[**m**,(**n**')] ⇒ **n** = **m** ,! 15 (()E: 14) ¡

n = **m** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(**n**') = (**m**') ⇒ **n** = **m** ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

((**n**') = (**m**') ⇒ **n** = **m**) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m ((n') = (m') ⇒ n = m) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **32.** P32 is an operator version of (PA6). ¡

⊢ ∀n ¬ (n') = 0 ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = 0 ,! 2 (Prem) ¡

((**n**') = 0 ⇒ σ[**n**,0]) ,! 3 (∀E: P16) ¡

(**n**') = 0 ⇒ σ[**n**,0] ,! 4 (()E: 3) ¡

σ[**n**,0] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] ,! 6 (𝔻P: P12,2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ¬ σ[**n**,0]) ,! 7 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] ⇒ ¬ σ[**n**,0] ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ σ[**n**,0] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 5,9) ¡

(**n**') = 0 ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

¬ (**n**') = 0 ,! 12 (¬I: 11) ¡

∀n ¬ (n') = 0 ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **33.** ¡

⊦ ¬ ∃n (n') = 0 ¡

∃n (n') = 0 ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = 0 ,! 2 (∃E: 1) ¡

¬ (**n**') = 0 ,! 3 (∀E: P32) ¡

𝔉 ,! 4 (𝔉I: 2,3) ¡

∃n (n') = 0 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 1,4) ¡

¬ ∃n (n') = 0 ! 6 (¬I: 5) ¡

▯

! **34.** P34 is an operator version of the useful C1.15. ¡

⊦ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃m (m') = n) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]))
,! 3 (∀E: C1.15) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃p(ω[p] & σ[p,**n**]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃p(ω[p] & σ[p,**n**]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**m**] & σ[**m**,**n**]) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**m**] & σ[**m**,**n**] ,! 7 (()E: 6) ¡

(ω[**m**] & σ[**m**,**n**] ⇒ (**m**') = **n**) ,! 8 (∀E: P18) ¡

ω[**m**] & σ[**m**,**n**] ⇒ (**m**') = **n** ,! 9 (()E: 8) ¡

(**m**') = **n** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

∃m (m') = **n** ,! 11 (∃I: 10) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃m (m') = **n** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃m (m') = **n**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ∃m (m') = n) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **35.** The next proposition also has a proof from the Peano Axioms. One appeals to Induction to prove:

∀n (ω[n] ⇒ (ω[n] ⇒ ¬ (n') = n)),

with ϕ being

(ω[n] ⇒ ¬ (n') = n).

For, ω[0] ⇒ ¬ (0') = 0 follows from P32. Now assume

ω[n] & (n') = m & (ω[n] ⇒ ¬ (n') = n).

So, ¬ (n') = n. Suppose ω[m] & (m') = m. Then ((n')') = (n'). By P31, n' = n, a contradiction. ¡

⊢ ∀n ¬ (n') = n ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

(**n**') = **n** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (𝔻P: P12,2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a])) ,! 4 (∀E: C7.7) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∃P∃a (𝔑[**n**,P] & ¬ P[a]) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃a (𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[a]) ,! 7 (∃E: 6) ¡

(𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**]) ,! 8 (∃E: 7) ¡

𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ,! 10 (&I: 3,9) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))])
,! 11 (∀E: P22) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & ¬ **P**[**a**] ⇒ 𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))]
,! 12 (()E: 11) ¡

𝔑[(**n**'),(**P** ∪ (**a**•))] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

𝔑[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 14 (=E: 2,13) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] ,! 15 (&E: 10) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] ,! 16 (&I: 14,15) ¡

P ⊆ (**P** ∪ (**a**•)) ,! 17 (∀E II2.12) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,**P**] & 𝔑[**n**,(**P** ∪ (**a**•))] & **P** ⊆ (**P** ∪ (**a**•))
,! 18 (&I: 16,17) ¡

(ω[n] & 𝔑[n,P] & 𝔑[n,(P ∪ (a•))] & P ⊆ (P ∪ (a•))
⇒ P ≡ (P ∪ (a•)))
,! 19 (∀E: C4.18) ¡

ω[n] & 𝔑[n,P] & 𝔑[n,(P ∪ (a•))] & P ⊆ (P ∪ (a•))
⇒ P ≡ (P ∪ (a•))
,! 20 (()E: 19) ¡

P ≡ (P ∪ (a•)) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

(P ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ P[a]) ,! 22 (∀E: II8.34) ¡

P ≡ (P ∪ (a•)) ⇒ P[a] ,! 23 (()E: 22) ¡

P[a] ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

¬ P[a] ,! 25 (&E: 10) ¡

𝔉 ,! 26 (𝔉I: 24,25) ¡

(n') = n ⇒ 𝔉 ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

¬ (n') = n ,! 28 (¬I: 27) ¡

∀n ¬ (n') = n ! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀n∀m ((n') = m ⇒ ¬ n = m) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

(n') = m ,! 2 (Prem) ¡

n = m ,! 3 (Prem) ¡

(n') = n ,! 4 (=E: 2,3) ¡

¬ (n') = n ,! 5 (∀E: P35) ¡

𝔉 ,! 6 (𝔉I: 4,5) ¡

n = m ⇒ 𝔉 ,! 7 (⇒I: 3,6) ¡

¬ n = m ,! 8 (¬I: 7) ¡

(n') = m ⇒ ¬ n = m ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((n') = m ⇒ ¬ n = m) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m ((n') = m ⇒ ¬ n = m) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯