!CHAPTER 9

THE NUMBERS 1 AND 2¡

! In this chapter several simple propositions concerning the numbers 1 and 2 will be asserted and proved. ¡

! **1.** ¡

⊢ (0') = 1 ¡

ω[0] & σ[0,1] ,! 1 (&I: ω0,One) ¡

(ω[0] & σ[0,1] ⇒ (0') = 1) ! 2 (∀E: C8.18) ¡

ω[0] & σ[0,1] ⇒ (0') = 1 ! 3 (()E: 2) ¡

(0') = 1 ! 4 (⇒E: 1,3) ¡

▯

! **2.** ¡

⊢ ω[1] ¡

((0') = 1 ⇒ ω[1]) ! 1 (∀E: C8.26) ¡

(0') = 1 ⇒ ω[1] ! 2 (()E: 1) ¡

ω[1] ! 3 (⇒E: P1,2) ¡

▯

! **3.** ¡

⊢ ∀a 𝔑[1,(a•)] ¡

a ,! 1 (Prem) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] ,! 2 (&I: ω0,C3.14) ¡

¬ ϕ[**a**] ,! 3 (∀E: II5.3) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & ¬ ϕ[**a**] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

(ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & ¬ ϕ[**a**] ⇒ 𝔑[(0'),(ϕ ∪ (**a**•))])
,! 5 (∀E: C8.22) ¡

ω[0] & 𝔑[0,ϕ] & ¬ ϕ[**a**] ⇒ 𝔑[(0'),(ϕ ∪ (**a**•))]
,! 6 (()E: 5) ¡

𝔑[(0'),(ϕ ∪ (**a**•))] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

𝔑[1,(ϕ ∪ (**a**•))] ,! 8 (=E: P1,7) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(ϕ ∪ (**a**•))] ,! 9 (&I: P2,8) ¡

(ϕ ∪ (**a**•)) ≡ (**a**•) ,! 10 (∀E: II5.20) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(ϕ ∪ (**a**•))] & (ϕ ∪ (**a**•)) ≡ (**a**•) ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(ω[1] & 𝔑[1,(ϕ ∪ (**a**•))] & (ϕ ∪ (**a**•)) ≡ (**a**•) ⇒ 𝔑[1,(**a**•)]) ,! 12 (∀E: C4.5) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(ϕ ∪ (**a**•))] & (ϕ ∪ (**a**•)) ≡ (**a**•) ⇒ 𝔑[1,(**a**•)] ,! 13 (()E: 12) ¡

𝔑[1,(**a**•)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

∀a 𝔑[1,(a•)] ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **4.** ¡

⊢ 𝔑[1,(0•)] ¡

𝔑[1,(0•)] ! 1 (∀E: P3) ¡

▯

! **5.** ¡

⊢ ¬ 0 = 1 ¡

¬ (0') = 0 ,! 1 (∀E: C8.35) ¡

0 = 1 ,! 2 (Prem) ¡

¬ (0') = 1 ,! 3 (=E: 1,2) ¡

𝔉 ,! 4 (𝔉I: P1,3) ¡

0 = 1 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 2,4) ¡

¬ 0 = 1 ! 6 (¬I: 5) ¡

▯

! **6.** ¡

⊢ ¬ 1 = 0 ¡

(¬ 0 = 1 ⇒ ¬ 1 = 0) ,! 1 (∀E: I3.3) ¡

¬ 0 = 1 ⇒ ¬ 1 = 0 ,! 2 (()E: 1) ¡

¬ 1 = 0 ! 3 (⇒E: P5,2) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ¬ (0•)[1] ¡

(¬ 0 = 1 ⇒ ¬ (0•)[1]) ,! 1 (∀E II8.8) ¡

¬ 0 = 1 ⇒ ¬ (0•)[1] ,! 2 (()E: 1) ¡

¬ (0•)[1] ,! 3 (⇒E: P5,2) ¡

▯

! **8.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[1,P] ⇒ ∃a P ≡ (a•)) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[1,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[1] & 𝔑[1,**P**] ,! 3 (&I: P2,2) ¡

ω[1] & 𝔑[1,**P**] & 𝔑[1,(0•)] ,! 4 (&I: P4,3) ¡

(ω[1] & 𝔑[1,**P**] & 𝔑[1,(0•)] ⇒ **P** ~ (0•))
,! 5 (∀E: C4.4) ¡

ω[1] & 𝔑[1,**P**] & 𝔑[1,(0•)] ⇒ **P** ~ (0•),! 6 (()E: 5) ¡

P ~ (0•) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**P** ~ (0•) ⇒ ∃a **P** ≡ (a•)) ,! 8 (∀E: III13.28) ¡

P ~ (0•) ⇒ ∃a **P** ≡ (a•) ,! 9 (()E: 8) ¡

∃a **P** ≡ (a•) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

𝔑[1,**P**] ⇒ ∃a **P** ≡ (a•) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(𝔑[1,**P**] ⇒ ∃a **P** ≡ (a•)) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀P (𝔑[1,P] ⇒ ∃a P ≡ (a•)) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀P (𝔑[1,P] ⇒ ∃a (P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

𝔑[1,**P**] ,! 2 (Prem) ¡

(𝔑[1,**P**] ⇒ ∃a **P** ≡ (a•)) ,! 3 (∀E: P8) ¡

𝔑[1,**P**] ⇒ ∃a **P** ≡ (a•) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃a **P** ≡ (a•) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

P ≡ (**a**•) ,! 6 (∃E: 5) ¡

(**P** ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = **a**))
,! 7 (∀E: II8.20) ¡

P ≡ (**a**•) ⇒ **P**[**a**] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = **a**) ,! 8 (()E: 7) ¡

P[**a**] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = **a**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**P**[**a**] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = **a**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∃a (**P**[a] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = a)) ,! 11 (∃I: 10) ¡

℩[1,**P**] ⇒ ∃a (**P**[a] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = a))
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(℩[1,**P**] ⇒ ∃a (**P**[a] & ∀x (**P**[x] ⇒ x = a)))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P (℩[1,P] ⇒ ∃a (P[a] & ∀x (P[x] ⇒ x = a)))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **10.** ¡

⊦ (1') = 2 ¡

ω[1] & σ[1,2] ,! 1 (&I: P2,Two) ¡

(ω[1] & σ[1,2] ⇒ (1') = 2) ! 2 (∀E: C8.18) ¡

ω[1] & σ[1,2] ⇒ (1') = 2 ! 3 (()E: 2) ¡

(1') = 2 ! 4 (⇒E: 1,3) ¡

▯

! **11.** ¡

⊦ ω[2] ¡

((1') = 2 ⇒ ω[2]) ! 1 (∀E: C8.26) ¡

(1') = 2 ⇒ ω[2] ! 2 (()E: 1) ¡

ω[2] ! 3 (⇒E: P10,2) ¡

▯

! **12.** ¡

⊦ ∀a∀b (¬ a = b ⇒ ℩[2,(a b ‡)]) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **a** = **b** ,! 2 (Prem) ¡

𝔑[1,(**a**•)] ,! 3 (∀E: P3) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(**a**•)] ,! 4 (&I: P2,3) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ ¬ (**a**•)[**b**]) ,! 5 (∀E: II8.8) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ ¬ (**a**•)[**b**] ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ (**a**•)[**b**] ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(**a**•)] & ¬ (**a**•)[**b**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[1] & 𝔑[1,(**a**•)] & ¬ (**a**•)[**b**] ⇒ 𝔑[(1'),((**a**•) ∪ (**b**•))])
,! 9 (∀E: C8.22) ¡

ω[1] & 𝔑[1,(**a**•)] & ¬ (**a**•)[**b**] ⇒ 𝔑[(1'),((**a**•) ∪ (**b**•))]
,! 10 (()E: 9) ¡

𝔑[(1'),((**a**•) ∪ (**b**•))] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

𝔑[2,((**a**•) ∪ (**b**•))] ,! 12 (=E: P10,11) ¡

ω[2] & 𝔑[2,((**a**•) ∪ (**b**•))] ,! 13 (&I: P11,12) ¡

(**a** **b** ‡) ≡ ((**a**•) ∪ (**b**•)) ,! 14 (∀E: II9.3) ¡

ω[2] & 𝔑[2,((**a**•) ∪ (**b**•))] & (**a** **b** ‡) ≡ ((**a**•) ∪ (**b**•))
,! 15 (&I: 13,14) ¡

(ω[2] & 𝔑[2,((**a**•) ∪ (**b**•))] & (**a** **b** ‡) ≡ ((**a**•) ∪ (**b**•))
⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)])
,! 16 (∀E: C4.6) ¡

ω[2] & 𝔑[2,((**a**•) ∪ (**b**•))] & (**a** **b** ‡) ≡ ((**a**•) ∪ (**b**•))
⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)]
,! 17 (()E: 16) ¡

𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

¬ **a** = **b** ⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)] ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(¬ **a** = **b** ⇒ 𝔑[2,(**a** **b** ‡)]) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀a∀b (¬ a = b ⇒ 𝔑[2,(a b ‡)]) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **13.** ¡

⊢ 𝔑[2,(0 1 ‡)] ¡

(¬ 0 = 1 ⇒ 𝔑[2,(0 1 ‡)]) ,! 1 (∀E: P12) ¡

¬ 0 = 1 ⇒ 𝔑[2,(0 1 ‡)] ,! 2 (()E: 1) ¡

𝔑[2,(0 1 ‡)] ! 3 (⇒E: P5,2) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ ((0')') = 2 ¡

((0')') = 2 ,! 1 (=E: P1,P10) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ¬ 0 = 2 ¡

  0 = 2 ,! 1 (Prem) ¡

  (1') = 0 ,! 2 (=E: 1,P10) ¡

  ¬ (1') = 0 ,! 3 (∀E: C8.32) ¡

  𝔉 ,! 4 (𝔉I: 2,3) ¡

0 = 2 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 1,4) ¡

¬ 0 = 2 ! 6 (¬I: 5) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ¬ 1 = 2 ¡

¬ (1') = 1 ,! 1 (∀E: C8.35) ¡

  1 = 2 ,! 2 (Prem) ¡

  ¬ (1') = 2 ,! 3 (=E: 1,2) ¡

  𝔉 ,! 4 (𝔉I: P10,3) ¡

1 = 2 ⇒ 𝔉 ,! 5 (⇒I: 2,4) ¡

¬ 1 = 2 ! 6 (¬I: 5) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ¬ 2 = 0 ¡

(¬ 0 = 2 ⇒ ¬ 2 = 0) ,! 1 (∀E: I3.3) ¡

¬ 0 = 2 ⇒ ¬ 2 = 0 ,! 2 (()E: 1) ¡

¬ 2 = 0 ! 3 (⇒E: P15,2) ¡

▯

! **18.** ¡

⊢ ¬ 2 = 1 ¡

(¬ 1 = 2 ⇒ ¬ 2 = 1) ,! 1 (∀E: I3.3) ¡

¬ 1 = 2 ⇒ ¬ 2 = 1 ,! 2 (()E: 1) ¡

¬ 2 = 1 ! 3 (⇒E: P16,2) ¡

▯

! **19.** ¡

⊢ ¬ (0 1 ‡)[2] ¡

¬ 0 = 2 & ¬ 1 = 2 ,! 1 (P15,P16) ¡

(¬ 0 = 2 & ¬ 1 = 2 ⇒ ¬ (0 1 ‡)[2]) ,! 2 (∀E II9.4) ¡

¬ 0 = 2 & ¬ 1 = 2 ⇒ ¬ (0 1 ‡)[2] ,! 3 (()E: 2) ¡

¬ (0 1 ‡)[2] ,! 4 (⇒E: 1,3) ¡

▯