!CHAPTER 1

ADDITION¡

! This chapter provides the basis for the laws of addition proved in the next. P7 is of special importance, in that it defines an addition term. ¡

! **1.** P1 contains the only appeal to the Add axiom. Subsequent propositions rely on P1. ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B]
& (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ (⊕[n,m,k] ⇔ 𝔑[k,(A ∪ B)])) ¡

n,m,**k**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 4 (&E: 2) ¡

((**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x])) ,! 5 (∀E: II5.25) ¡

(**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ⇒ ¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x]) ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x]) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & ¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x])
,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & ¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x])
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{x : **A**[x] ∨ **B**[x]}]))
,! 9 (∀E: Add) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & ¬ ∃x(**A**[x] & **B**[x])
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{x : **A**[x] ∨ **B**[x]}])
,! 10 (()E: 9) ¡

(⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{x : **A**[x] ∨ **B**[x]}]) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{x : **A**[x] ∨ **B**[x]}] ,! 12 (()E: 11) ¡

! There is an appeal to Exch, since the definition of union in II2.1 uses the variable "a" rather than the variable "x". ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ 𝔑[**k**,{a : **A**[a] ∨ **B**[a]}] ,! 13 (Exch: 12) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 14 (Prem) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇒ 𝔑[**k**,{a : **A**[a] ∨ **B**[a]}] ,! 15 (⇔E: 13) ¡

𝔑[**k**,{a : **A**[a] ∨ **B**[a]}] ,! 16 (⇒E: 14,15) ¡

ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 17 (𝔻I: II2.1,16) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇒ ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 18 (⇒I: 14,17) ¡

ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 19 (Prem) ¡

ℿ[**k**,{a : **A**[a] ∨ **B**[a]}] ,! 20 (𝔻E: II2.1,19) ¡

ℿ[**k**,{x : **A**[x] ∨ **B**[x]}] ⇒ ⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 21 (⇔E: 13) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 22 (⇒E: 20,21) ¡

ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)] ⇒ ⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 23 (⇒I: 19,22) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 24 (⇔I: 18,23) ¡

(⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)]) ,! 25 (()I: 24) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)])
,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)]))
,! 27 (()I: 26) ¡

∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B]
& (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ (⊕[n,m,k] ⇔ ℿ[k,(A ∪ B)]))
! 28 (∀I: 1,27) ¡

▯

! **2.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B]
& (A ∩ B) ≡ ϕ & ⊕[n,m,k]
⇒ ℿ[k,(A ∪ B)]) ¡

n,**m**,**k**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ⊕[**n**,**m**,**k**]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 3 (&E: 2) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)]))
,! 5 (∀E: P1) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ (⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)])
,! 6 (()E: 5) ¡

(⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)]) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇔ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 8 (()E: 7) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ⇒ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 9 (⇔E: 8) ¡

♏[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ⊕[**n**,**m**,**k**]
⇒ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ⊕[**n**,**m**,**k**]
⇒ ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,k]
⇒ ♏[k,(A ∪ B)])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **3.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B]
& (A ∩ B) ≡ ϕ & ♏[k,(A ∪ B)]
⇒ ⊕[n,m,k]) ¡

n,**m**,**k**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ♏[**k**,(**A** ∪ **B**)]
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 3 (&E: 2) ¡

♏[**k**,(**A** ∪ **B**)] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ

⇒ (⊕[n,m,k] ⇔ ♏[k,(A ∪ B)]))
,! 5 (∀E: P1) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ (⊕[n,m,k] ⇔ ♏[k,(A ∪ B)])
,! 6 (()E: 5) ¡

(⊕[n,m,k] ⇔ ♏[k,(A ∪ B)]) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

⊕[n,m,k] ⇔ ♏[k,(A ∪ B)] ,! 8 (()E: 7) ¡

♏[k,(A ∪ B)] ⇒ ⊕[n,m,k] ,! 9 (⇔E: 8) ¡

⊕[n,m,k] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ♏[k,(A ∪ B)]
⇒ ⊕[n,m,k]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ♏[k,(A ∪ B)]
⇒ ⊕[n,m,k])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ♏[k,(A ∪ B)]
⇒ ⊕[n,m,k])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **4.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
⇒ ∃A∃B (♏[n,A] & ♏[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ♏[k,(A ∪ B)])) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ∃P∃Q (♏[n,P] & ♏[m,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 4 (∀E: IV7.18) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ∃P∃Q (♏[n,P] & ♏[m,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 5 (()E: 4) ¡

∃P∃Q (♏[n,P] & ♏[m,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃Q (ℿ[n,A] & ℿ[m,Q] & (A ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 7 (∃E: 6) ¡

(ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ) ,! 8 (∃E: 7) ¡

ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,k]
,! 10 (&I: 2,9) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,k]
⇒ ℿ[k,(A ∪ B)])
,! 11 (∀E: P2) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,k]
⇒ ℿ[k,(A ∪ B)]
,! 12 (()E: 11) ¡

ℿ[k,(A ∪ B)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)]
,! 14 (&I: 9,13) ¡

(ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)])
,! 15 (()I: 14) ¡

∃B (ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)])
,! 16 (∃I: 15) ¡

∃A∃B (ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)])
,! 17 (∃I: 16) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
⇒ ∃A∃B (ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)])
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
⇒ ∃A∃B (ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)]))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
⇒ ∃A∃B (ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ℿ[k,(A ∪ B)]))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! P5 and P6 establish our right to define an addition term, which appears in P7. ¡

! **5.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊕[n,m,a])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 3 (∀E: IV7.18) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃Q (𝔑[**n**,P] & 𝔑[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃Q (𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,Q] & (**A** ∩ Q) ≡ ϕ) ,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ) ,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] ,! 9 (&E: 8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] ,! 10 (&I: 2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**]
⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,(**A** ∪ **B**)]))
,! 11 (∀E: IV5.19) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] ⇒ ∃n (ω[n] & 𝔑[n,(**A** ∪ **B**)])
,! 12 (()E: 11) ¡

∃n (ω[n] & 𝔑[n,(**A** ∪ **B**)]) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(ω[**a**] & 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)]) ,! 14 (∃E: 13) ¡

ω[**a**] & 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)] ,! 15 (()E: 14) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)] ,! 16 (&I: 2,15) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)]
,! 17 (&I: 8,16) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)]
⇒ ⊕[**n**,**m**,**a**])
,! 18 (∀E: P3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**a**] & 𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)]
⇒ ⊕[**n**,**m**,**a**]

,! 19 (()E: 18) ¡

⊕[**n**,**m**,**a**] ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

ω[**a**] ,! 21 (&E: 15) ¡

ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**] ,! 22 (&I: 20,21) ¡

(ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**]) ,! 23 (&I: 22) ¡

∃a (ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) ,! 24 (⇒E: 23) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) ,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a])) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃a (ω[a] & ⊕[n,m,a]))
! 27 (∀I: 1,26) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∀a∀b((ω[a] & ⊕[n,m,a]) & (ω[b] & ⊕[n,m,b])
⇒ a = b)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

a,**b** ,! 3 (Prem) ¡

(ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊕[**n**,**m**,**b**])
,! 4 (Prem) ¡

(ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**]) ,! 5 (&E: 4) ¡

(ω[**b**] & ⊕[**n**,**m**,**b**]) ,! 6 (&E: 4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (ℕ[**n**,P] & ℕ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ))
,! 7 (∀E: IV7.18) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ∃P∃Q (ℕ[**n**,P] & ℕ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 8 (()E: 7) ¡

∃P∃Q (ℕ[**n**,P] & ℕ[**m**,Q] & (P ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 9 (⇒E: 2,8) ¡

∃Q (ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,Q] & (**A** ∩ Q) ≡ ϕ)
,! 10 (∃E: 9) ¡

(ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ) ,! 11 (∃E: 10) ¡

ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[a] & ⊕[n,m,a] ,! 13 (()E: 5) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[a] & ⊕[n,m,a] ,! 14 (&I: 2,13) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[a] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,a] ,! 15 (&I: 12,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[a] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,a]
⇒ ℳ[a,(A ∪ B)])
,! 16 (∀E: P2) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[a] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,a]
⇒ ℳ[a,(A ∪ B)]
,! 17 (()E: 16) ¡

ℳ[a,(A ∪ B)] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[b] & ⊕[n,m,b] ,! 19 (()E: 6) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[b] & ⊕[n,m,b] ,! 20 (&I: 2,19) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[b] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,b] ,! 21 (&I: 12,20) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[b] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,b]
⇒ ℳ[b,(A ∪ B)])
,! 22 (∀E: P2) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[b] & ℳ[n,A] & ℳ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ⊕[n,m,b]
⇒ ℳ[b,(A ∪ B)]
,! 23 (()E: 22) ¡

ℳ[b,(A ∪ B)] ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

ℳ[a,(A ∪ B)] & ℳ[b,(A ∪ B)] ,! 25 (&I: 18,24) ¡

ω[a] ,! 26 (&E: 13) ¡

ω[a] & ℳ[a,(A ∪ B)] & ℳ[b,(A ∪ B)]
,! 27 (&I: 25,26) ¡

ω[b] ,! 28 (&E: 19) ¡

ω[a] & ω[b] & ℳ[a,(A ∪ B)] & ℳ[b,(A ∪ B)]
,! 29 (&I: 27,28) ¡

(ω[a] & ω[b] & ℳ[a,(A ∪ B)] & ℳ[b,(A ∪ B)] ⇒ a = b)

,! 30 (∀E: IV2.10) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] & 𝔑[**a**,(**A** ∪ **B**)] & 𝔑[**b**,(**A** ∪ **B**)] ⇒ **a** = **b**
,! 31 (()E: 30) ¡

a = **b** ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

(ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊕[**n**,**m**,**b**]) ⇒ **a** = **b**
,! 33 (⇒I: 4,32) ¡

((ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**]) & (ω[**b**] & ⊕[**n**,**m**,**b**]) ⇒ **a** = **b**)
,! 34 (()I: 33) ¡

∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 35 (∀I: 3,34) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 36 (⇒I: 2,35) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b))
,! 37 (()I: 36) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∀a∀b((ω[a] & ⊕[n,m,a]) & (ω[b] & ⊕[n,m,b]) ⇒ a = b))
! 38 (∀I: 1,37) ¡

▯

! **7.** ¡

𝕋 + ; (**n** + **m**) ; ω[**n**] & ω[**m**] ; (ω[**a**] & ⊕[**n**,**m**,**a**])
¡! (𝕋D: P5,P6) ¡

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 3 (𝕋I: P7,2) ¡

ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 4 (()I: 3) ¡

ω[(**n**+**m**)] ,! 5 (&E: 4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**+**m**)] ,! 6 (⇒I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**+**m**)]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! **9.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ⊕[n,m,(n+m)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 3 (𝕋I: P7,2) ¡

ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 4 (()I: 3) ¡

⊕[**n**,**m**,**a**] ,! 5 (&E: 4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 6 (⇒I: 2,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ⊕[n,m,(n+m)]) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n + m) = k ⇒ ω[k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** + **m**) = **k** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: P7,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** + **m**)]) ,! 4 (∀E: P8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n** + **m**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(**n** + **m**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**k**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(**n** + **m**) = **k** ⇒ ω[**k**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**n** + **m**) = **k** ⇒ ω[**k**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((n + m) = k ⇒ ω[k]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k = (n + m) ⇒ ω[k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

k = (**n** + **m**) ,! 2 (Prem) ¡

k = **k** ,! 3 (=I) ¡

(**n** + **m**) = **k** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**n** + **m**) = **k** ⇒ ω[**k**]) ,! 5 (∀E: P10) ¡

(**n** + **m**) = **k** ⇒ ω[**k**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**k**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

k = (**n** + **m**) ⇒ ω[**k**] ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**k** = (**n** + **m**) ⇒ ω[**k**]) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (k = (n + m) ⇒ ω[k]) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **12.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

⊕[**n**,**m**,**k**] ,! 5 (&E: 2) ¡

(ω[**k**] & ⊕[**n**,**m**,**k**]) ,! 6 (()I: 4) ¡

(ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 7 (𝕋I: P7,3) ¡

(ω[**k**] & ⊕[**n**,**m**,**k**]) & (ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)])
,! 8 (&I: 6,7) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b))
,! 9 (∀E: P6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 10 (()E: 9) ¡

∀a∀b ((ω[a] & ⊕[**n**,**m**,a]) & (ω[b] & ⊕[**n**,**m**,b]) ⇒ a = b)
,! 11 (⇒E: 3,10) ¡

((ω[**k**] & ⊕[**n**,**m**,**k**]) & (ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)])
⇒ **k** = (**n**+**m**))
,! 12 (∀E: 11;

(n+m): P7,3) ¡

(ω[k] & ⊕[n,m,k]) & (ω[(n+m)] & ⊕[n,m,(n+m)]) ⇒ k = (n+m)
,! 13 (()E: 12) ¡

k = (n+m) ,! 14 (⇒E: 8,13) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m)
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m))
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

! **13.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m))
,! 3 (∀E: P12) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ k = (n+m)
,! 4 (()E: 3) ¡

k = (n+m) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

k = k ,! 6 (=I) ¡

(n+m) = k ,! 7 (=E: 5,6) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k)
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k)
! 10 (∀I: 1,9) ¡

! **14.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

(n+m) = k ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (𝕋E: P7,2) ¡

(ω[(n+m)] & ⊕[n,m,(n+m)]) ,! 4 (𝕋I: P7,2) ¡

ω[(n+m)] & ⊕[n,m,(n+m)] ,! 5 (()I: 4) ¡

ω[k] & ⊕[n,m,k] ,! 6 (=E: 2,5) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k])
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k])
! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇔ (n+m) = k) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k)
,! 2 (∀E: P13) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇒ (n+m) = k
,! 3 (()E: 2) ¡

((n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k])
,! 4 (∀E: P14) ¡

(n+m) = k ⇒ ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k]
,! 5 (()E: 4) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇔ (n+m) = k
,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇔ (n+m) = k)
,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ⊕[n,m,k] ⇔ (n+m) = k)
! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ 𝔑[(n+m),(A ∪ B)]) ¡

n,**m**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 4 (∀E: P9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]
,! 7 (&I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]
⇒ ℿ[(**n**+**m**),(**A** ∪ **B**)])
,! 8 (∀E: P2;
(**n**+**m**): P7,3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]
⇒ ℿ[(**n**+**m**),(**A** ∪ **B**)]
,! 9 (()E: 8) ¡

ℿ[(**n**+**m**),(**A** ∪ **B**)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ ℿ[(**n**+**m**),(**A** ∪ **B**)]
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
⇒ ℿ[(**n**+**m**),(**A** ∪ **B**)])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ ℿ[(n+m),(A ∪ B)])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℿ[n,A] & ℿ[m,B]
& (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[k,(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m)) ¡

n,**m**,**k**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] & ℿ[**n**,**A**] & ℿ[**m**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ
& ℿ[**k**,(**A** ∪ **B**)]
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
,! 3 (&E: 2) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 5 (&E: 2) ¡

ℕ[k,(A ∪ B)] ,! 6 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)]) ,! 7 (∀E: P8) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[(n+m)] ,! 9 (⇒E: 4,8) ¡

ω[k] & ω[(n+m)] ,! 10 (&I: 5,9) ¡

ω[k] & ω[(n+m)] & ℕ[k,(A ∪ B)] ,! 11 (&I: 6,10) ¡

(ω[n] & ω[m] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ ℕ[(n+m),(A ∪ B)])
,! 12 (∀E: P16) ¡

ω[n] & ω[m] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
⇒ ℕ[(n+m),(A ∪ B)]
,! 13 (()E: 12) ¡

ℕ[(n+m),(A ∪ B)] ,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

ω[k] & ω[(n+m)] & ℕ[k,(A ∪ B)] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)]
,! 15 (&I: 11,14) ¡

(ω[k] & ω[(n+m)] & ℕ[k,(A ∪ B)] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m))
,! 16 (∀E: IV2.10;
P7,4) ¡

ω[k] & ω[(n+m)] & ℕ[k,(A ∪ B)] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m)
,! 17 (()E: 16) ¡

k = (n+m) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ℕ[k,(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ℕ[k,(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m))

,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ω[k] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& 𝔑[k,(A ∪ B)]
⇒ k = (n+m))

! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **18.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∃A∃B (𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& 𝔑[(n+m),(A ∪ B)])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]) ,! 3 (𝕋I: P7,2) ¡

ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)],! 5 (&I: 2,4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]
⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& 𝔑[(**n**+**m**),(A ∪ B)]))

,! 6 (∀E: P4;
(**n**+**m**): P7,2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & ⊕[**n**,**m**,(**n**+**m**)]
⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & 𝔑[(**n**+**m**),(A ∪ B)])
,! 7 (()E: 6) ¡

∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & 𝔑[(**n**+**m**),(A ∪ B)])
,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & 𝔑[(**n**+**m**),(A ∪ B)])
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& 𝔑[(**n**+**m**),(A ∪ B)]))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m]
⇒ ∃A∃B (𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& 𝔑[(n+m),(A ∪ B)]))

! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **19.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k = (n+m)
⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ φ
& ℕ[k,(A ∪ B)])) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

k = (**n**+**m**) ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: P7,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ
& ℕ[(**n**+**m**),(A ∪ B)]))
,! 4 (∀E: P18) ¡

ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ & ℕ[(**n**+**m**),(A ∪ B)])
,! 5 (()E: 4) ¡

∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ & ℕ[(**n**+**m**),(A ∪ B)])
,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ & ℕ[**k**,(A ∪ B)])
,! 7 (=E: 2,6) ¡

k = (**n**+**m**)
⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ & ℕ[**k**,(A ∪ B)])
,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

(**k** = (**n**+**m**)
⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ & ℕ[**k**,(A ∪ B)]))
,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k (k = (n+m)
⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ φ
& ℕ[k,(A ∪ B)]))
! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **20.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[(n+m),B] & A ⊆ B)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & (A ∩ B) ≡ φ

& ℕ[(n+m),(A ∪ B)]))
,! 3 (∀E: P18) ¡

ω[n] & ω[m]
⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[(n+m),(A ∪ B)])
,! 4 (()E: 3) ¡

∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[(n+m),(A ∪ B)])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[(n+m),(A ∪ B)])
,! 6 (∃E: 5) ¡

(ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[(n+m),(A ∪ B)])
,! 7 (∃E: 6) ¡

ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[(n+m),(A ∪ B)]
,! 8 (()E: 7) ¡

ℕ[m,B] ,! 9 (&E: 8) ¡

ℕ[(n+m),(A ∪ B)] ,! 10 (&E: 8) ¡

ℕ[m,B] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)] ,! 11 (&I: 9,10) ¡

B ⊆ (A ∪ B) ,! 12 (∀E: II2.13) ¡

ℕ[m,B] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)] & B ⊆ (A ∪ B)
,! 13 (&I: 11,12) ¡

(ℕ[m,B] & ℕ[(n+m),(A ∪ B)] & B ⊆ (A ∪ B))
,! 14 (()I: 13) ¡

∃B (ℕ[m,B] & ℕ[(n+m),B] & B ⊆ B) ,! 15 (∃I: 14) ¡

∃A∃B (ℕ[m,A] & ℕ[(n+m),B] & A ⊆ B) ,! 16 (∃I: 15) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ∃A∃B (ℕ[m,A] & ℕ[(n+m),B] & A ⊆ B)
,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ∃A∃B (ℕ[m,A] & ℕ[(n+m),B] & A ⊆ B))
,! 18 (()I: 17) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[(n+m),B] & A ⊆ B))
! 19 (∀I: 1,18) ¡

□

! **21.** ¡

⊢ ∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & A ⊆ B
⇒ ∃k ((k+n) = m & ℕ[k,(B \ A)])) ¡

n,**m**,**A**,**B** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & $\mathfrak{N}$[**n**,**A**] & $\mathfrak{N}$[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**
,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

$\mathfrak{N}$[**n**,**A**] ,! 5 (&E: 2) ¡

$\mathfrak{N}$[**m**,**B**] ,! 6 (&E: 2) ¡

A ⊆ **B** ,! 7 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & $\mathfrak{N}$[**m**,**B**] ,! 8 (&I: 4,6) ¡

(**B** \ **A**) ⊆ **B** ,! 9 (∀E: II7.13) ¡

ω[**m**] & $\mathfrak{N}$[**m**,**B**] & (**B** \ **A**) ⊆ **B** ,! 10 (&I: 8,9) ¡

(ω[**m**] & $\mathfrak{N}$[**m**,**B**] & (**B** \ **A**) ⊆ **B** ⇒ *f* (**B** \ **A**))
,! 11 (∀E: IV5.11) ¡

ω[**m**] & $\mathfrak{N}$[**m**,**B**] & (**B** \ **A**) ⊆ **B** ⇒ *f* (**B** \ **A**)
,! 12 (()E: 11) ¡

f (**B** \ **A**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∃n (ω[n] & $\mathfrak{N}$[n,(**B** \ **A**)]) ,! 14 ($\mathbb{S}$E: IV5.1,13)
¡

(ω[**k**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)]) ,! 15 (∃E: 14) ¡

ω[**k**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] ,! 16 (()E: 15) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] ,! 17 (&I: 3,16) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] & $\mathfrak{N}$[**n**,**A**] ,! 18 (&I: 5,17) ¡

((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ ,! 19 (∀E: II7.81) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] & $\mathfrak{N}$[**n**,**A**] & ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
,! 20 (&I: 18,19) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] & $\mathfrak{N}$[**n**,**A**] & ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
⇒ $\mathfrak{N}$[(**k**+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)])
,! 21 (∀E: P16) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] & $\mathfrak{N}$[**k**,(**B** \ **A**)] & $\mathfrak{N}$[**n**,**A**] & ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
⇒ $\mathfrak{N}$[(**k**+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)]
,! 22 (()E: 21) ¡

$\mathfrak{N}$[(**k**+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)] ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

(A ⊆ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ≡ B) ,! 24 (∀E: II7.65) ¡

A ⊆ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ≡ B ,! 25 (()E: 24) ¡

((B \ A) ∪ A) ≡ B ,! 26 (⇒E: 7,25) ¡

ℕ[(k+n),((B \ A) ∪ A)] & ((B \ A) ∪ A) ≡ B
,! 27 (&I: 23,26) ¡

ω[k] & ω[n] ,! 28 (&E: 17) ¡

(ω[k] & ω[n] ⇒ ω[(k+n)]) ,! 29 (∀E: P8) ¡

ω[k] & ω[n] ⇒ ω[(k+n)] ,! 30 (()E: 29) ¡

ω[(k+n)] ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

ω[(k+n)] & ℕ[(k+n),((B \ A) ∪ A)] & ((B \ A) ∪ A) ≡ B
,! 32 (&I: 27,31) ¡

(ω[(k+n)] & ℕ[(k+n),((B \ A) ∪ A)] & ((B \ A) ∪ A) ≡ B
⇒ ℕ[(k+n),B])
,! 33 (∀E: IV4.5;
(k+n): P7,28) ¡

ω[(k+n)] & ℕ[(k+n),((B \ A) ∪ A)] & ((B \ A) ∪ A) ≡ B
⇒ ℕ[(k+n),B]
,! 34 (()E: 33) ¡

ℕ[(k+n),B] ,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

ω[(k+n)] & ω[m] & ℕ[m,B] ,! 36 (&I: 8,31) ¡

ω[(k+n)] & ω[m] & ℕ[(k+n),B] & ℕ[m,B]
,! 37 (&I: 35,36) ¡

(ω[(k+n)] & ω[m] & ℕ[(k+n),B] & ℕ[m,B] ⇒ (k+n) = m)
,! 38 (∀E: IV2.10;
(k+n): P7,28) ¡

ω[(k+n)] & ω[m] & ℕ[(k+n),B] & ℕ[m,B] ⇒ (k+n) = m
,! 39 (()E: 38) ¡

(k+n) = m ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

ℕ[k,(B \ A)] ,! 41 (&E: 16) ¡

(k+n) = m & ℕ[k,(B \ A)] ,! 42 (&I: 40,41) ¡

((k+n) = m & ℕ[k,(B \ A)]) ,! 43 (()I: 42) ¡

∃k ((k+n) = m & ℕ[k,(B \ A)]) ,! 44 (∃I: 43) ¡

ω[n] & ω[m] & ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & A ⊆ B
⇒ ∃k ((k+n) = m & ℕ[k,(B \ A)])

,! 45 (⇒I: 2,44) ¡

(ω[n] & ω[m] & ♍[n,A] & ♍[m,B] & A ⊆ B
⇒ ∃k ((k+n) = m & ♍[k,(B \ A)]))
,! 46 (()I: 45) ¡

∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ♍[n,A] & ♍[m,B] & A ⊆ B
⇒ ∃k ((k+n) = m & ♍[k,(B \ A)]))
! 47 (∀I: 1,46) ¡

□

! **22.** ¡

⊢ ∀n∀m∀A (♍[(n+m),A]
⇒ ∃Q∃R (♍[n,Q] & ♍[m,R] & (Q ∪ R) ≡ A
& (Q ∩ R) ≡ ϕ)) ¡

n,m,A ,! 1 (Prem) ¡

♍[(n+m),A] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (𝕋E: P7,2) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)]) ,! 4 (∀E: P8) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[(n+m)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[(n+m)] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(ω[n] & ω[m]
⇒ ∃A∃B (♍[n,A] & ♍[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ
& ♍[(n+m),(A ∪ B)]))
,! 8 (∀E: P18) ¡

ω[n] & ω[m]
⇒ ∃A∃B (♍[n,A] & ♍[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ♍[(n+m),(A ∪ B)])
,! 9 (()E: 8) ¡

∃A∃B (♍[n,A] & ♍[m,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ♍[(n+m),(A ∪ B)])
,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

∃B (♍[n,X] & ♍[m,B] & (X ∩ B) ≡ ϕ & ♍[(n+m),(X ∪ B)])
,! 11 (∃E: 10) ¡

(♍[n,X] & ♍[m,Y] & (X ∩ Y) ≡ ϕ & ♍[(n+m),(X ∪ Y)])
,! 12 (∃E: 11) ¡

♍[n,X] & ♍[m,Y] & (X ∩ Y) ≡ ϕ & ♍[(n+m),(X ∪ Y)]
,! 13 (()E: 12) ¡

𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ ,! 14 (&E: 13) ¡

𝔑[(**n**+**m**),(**X** ∪ **Y**)] ,! 15 (&E: 13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & 𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ
,! 16 (&I: 7,14) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & 𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**]
& 𝔑[(**n**+**m**),(**X** ∪ **Y**)] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ
,! 17 (&I: 15,16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & 𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**]
& 𝔑[(**n**+**m**),(**X** ∪ **Y**)] & 𝔑[(**n**+**m**),**A**] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ
,! 18 (&I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & 𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**]
& 𝔑[(**n**+**m**),(**X** ∪ **Y**)] & 𝔑[(**n**+**m**),**A**] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (𝔑[**n**,Q] & 𝔑[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **A** & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
,! 19 (∀E: IV4.14) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[(**n**+**m**)] & 𝔑[**n**,**X**] & 𝔑[**m**,**Y**]
& 𝔑[(**n**+**m**),(**X** ∪ **Y**)] & 𝔑[(**n**+**m**),**A**] & (**X** ∩ **Y**) ≡ ϕ
⇒ ∃Q∃R (𝔑[**n**,Q] & 𝔑[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **A** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 20 (()E: 19) ¡

∃Q∃R (𝔑[**n**,Q] & 𝔑[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **A** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

𝔑[(**n**+**m**),**A**]
⇒ ∃Q∃R (𝔑[**n**,Q] & 𝔑[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **A** & (Q ∩ R) ≡ ϕ)
,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(𝔑[(**n**+**m**),**A**]
⇒ ∃Q∃R (𝔑[**n**,Q] & 𝔑[**m**,R] & (Q ∪ R) ≡ **A** & (Q ∩ R) ≡ ϕ))
,! 23 (()I: 22) ¡

∀n∀m∀A (𝔑[(n+m),A]
⇒ ∃Q∃R (𝔑[n,Q] & 𝔑[m,R] & (Q ∪ R) ≡ A
& (Q ∩ R) ≡ ϕ))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

□