CHAPTER 11

THE FUNDAMENTAL THEOREMS OF ELEMENTARY ARITHMETIC

In this chapter we prove the two fundamental theorems of arithmetic. The first connects succession and addition, the second addition and multiplication.

1. THE FIRST FUNDAMENTAL THEOREM OF ARITHMETIC (THE MINOR). Addition is repeated succession.

$$\vdash \forall n \forall R \forall a \, (\omega[n] \,\&\, \omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,n] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'n) = (a+n))$$

We first prove by induction that

$$\forall n \, (\omega[n] \Rightarrow \forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,n] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'n) = (a+n)))$$

taking ϕ to be

$$\forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,n] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'n) = (a+n))$$

It must be shown that

$$\forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,0] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'0) = (a+0))$$

and

$$\forall n \forall m \, (\omega[n] \,\&\, \sigma[n,m] \,\&\, \forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,n] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'n) = (a+n)) \Rightarrow \forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,m] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'm) = (a+m)))$$

To prove:

$$\forall R \forall a \, (\omega[a] \,\&\, (R'0) = a \,\&\, \forall i \, (<[i,0] \Rightarrow (R'(i')) = ((R'i)')) \Rightarrow (R'0) = (a+0))$$

R, **a** ,! 1 (Prem)

$$\omega[\mathbf{a}] \,\&\, (\mathbf{R}'0) = \mathbf{a} \,\&\, \forall i \, (<[i,0] \Rightarrow (\mathbf{R}'(i')) = ((\mathbf{R}'i)'))$$

,! 2 (Prem)

```
    ω[a]                                        ,! 3 (&E: 2)        ¡

    (R´0) = a                                   ,! 4 (&E: 2)        ¡

    ( ω[a] ⇒ (a+0) = a )                        ,! 5 (∀E: C2.32)    ¡

    ω[a] ⇒ (a+0) = a                            ,! 6 (()E: 5)       ¡

    (a+0) = a                                   ,! 7 (⇒E: 3,6)      ¡

    (R´0) = (a+0)                               ,! 8 (=E: 4,7)      ¡

  ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
  ⇒ (R´0) = (a+0)
                                                ,! 9 (⇒I: 2,8)      ¡

  ( ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
    ⇒ (R´0) = (a+0) )
                                                ,! 10 (()I: 9)      ¡

∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
       ⇒ (R´0) = (a+0) )
                                                ,! 11 (∀I: 1,10)    ¡

! To prove:
    ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
           & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
                    & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                    ⇒ (R´n) = (a+n) )
           ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
                     & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                     ⇒ (R´m) = (a+m) ) )                    ¡

  n,m                                           ,! 12 (Prem)        ¡

    ω[n] & σ[n,m]
    & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
               & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
               ⇒ (R´n) = (a+n) )
                                                ,! 13 (Prem)        ¡

    ω[n] & σ[n,m]                               ,! 14 (&E: 13)      ¡

    ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
             ⇒ (R´n) = (a+n) )
                                                ,! 15 (&E: 13)      ¡

    ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n') = m )                ,! 16 (∀E: IV8.18)  ¡

    ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n') = m                    ,! 17 (()E: 16)     ¡

    (n') = m                                    ,! 18 (⇒E: 14,17)   ¡
```

```
    ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ <[n,m] )                ,! 19 (∀E: C4.31)   ¡

    ω[n] & σ[n,m] ⇒ <[n,m]                    ,! 20 (()E: 19)     ¡

    <[n,m]                                    ,! 21 (⇒E: 14,20)   ¡

      R,a                                     ,! 22 (Prem)        ¡

        ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 23 (Prem)        ¡

        ω[a] & (R´0) = a                      ,! 24 (&E: 23)      ¡

        ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 25 (&E: 23)      ¡

          i                                   ,! 26 (Prem)        ¡

            <[i,n]                            ,! 27 (Prem)        ¡

            <[i,n] & <[n,m]                   ,! 28 (&I: 21,27)   ¡

            ( <[i,n] & <[n,m] ⇒ <[i,m] )      ,! 29 (∀E: C4.18)   ¡

            <[i,n] & <[n,m] ⇒ <[i,m]          ,! 30 (()E: 29)     ¡

            <[i,m]                            ,! 31 (⇒E: 28,30)   ¡

            ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 32 (∀E: 25)      ¡

            <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)')      ,! 33 (()E: 32)     ¡

            (R´(i')) = ((R´i)')               ,! 34 (⇒E: 31,33)   ¡

          <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)')        ,! 35 (⇒I: 27,34)   ¡

          ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 36 (()I: 35)     ¡

        ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 37 (∀I: 26,36)   ¡

        ω[a] & (R´0) = a
        & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                              ,! 38 (&I: 24,37)   ¡

! Applying the induction hypothesis...                             ¡

        ( ω[a] & (R´0) = a
          & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
          ⇒ (R´n) = (a+n) )
                                              ,! 39 (∀E: 15)      ¡
```

```
      ω[a] & (R´0) = a
      & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
      ⇒ (R´n) = (a+n)
                                        ,! 40 ()E: 39)     ¡

      (R´n) = (a+n)                     ,! 41 (⇒E: 38,40)  ¡

      ( <[n,m] ⇒ (R´(n')) = ((R´n)') ) ,! 42 (∀E: 25)      ¡

      <[n,m] ⇒ (R´(n')) = ((R´n)')      ,! 43 ()E: 42)     ¡

      (R´(n')) = ((R´n)')               ,! 44 (⇒E: 21,43)  ¡

      (R´(n')) = ((a+n)')               ,! 45 (=E: 41,44)  ¡

      ω[a] & ω[n]                       ,! 46 (𝕋E: C1.7,41)¡

      ( ω[a] & ω[n] ⇒ (a + (n')) = ((a + n)') )
                                        ,! 47 (∀E: C2.51)  ¡

      ω[a] & ω[n] ⇒ (a + (n')) = ((a + n)')
                                        ,! 48 ()E: 47)     ¡

      (a + (n')) = ((a + n)')           ,! 49 (⇒E: 46,48)  ¡

      (R´(n')) = (a + (n'))             ,! 50 (=E: 45,49)  ¡

      (R´m) = (a + m)                   ,! 51 (=E: 18,50)  ¡

    ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
    ⇒ (R´m) = (a + m)
                                        ,! 52 (⇒I: 23,51)  ¡

    ( ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
      ⇒ (R´m) = (a + m) )
                                        ,! 53 ()I: 52)     ¡

  ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
         & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
         ⇒ (R´m) = (a+m) )
                                        ,! 54 (∀I: 22,53)  ¡

ω[n] & σ[n,m]
& ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
         & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
         ⇒ (R´n) = (a+n) )
⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
         & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
         ⇒ (R´m) = (a+m) )
                                        ,! 55 (⇒I: 13,54)  ¡

( ω[n] & σ[n,m]
```

```
    & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
             ⇒ (R´n) = (a+n) )
    ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
             & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
             ⇒ (R´m) = (a+m) ) )
                                          ,! 56 (()I: 55)     ¡

∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
       & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
                & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                ⇒ (R´n) = (a+n) )
       ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
                & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                ⇒ (R´m) = (a+m) ) )
                                          ,! 57 (∀I: 12,56)   ¡

∀n ( ω[n]
     ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
              & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
              ⇒ (R´n) = (a+n) ) )
                                          ,! 58 (Induct: 11,57)
                                                              ¡

  n,R,a                                   ,! 59 (Prem)        ¡

    ω[n] & ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                          ,! 60 (Prem)        ¡

    ω[n]                                  ,! 61 (&E: 60)      ¡

    ω[a] & (R´0) = a & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
                                          ,! 62 (&E: 60)      ¡

    ( ω[n]
      ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
               & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
               ⇒ (R´n) = (a+n) ) )
                                          ,! 63 (∀E: 58)      ¡

    ω[n]
    ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
             ⇒ (R´n) = (a+n) )
                                          ,! 64 (()E: 63)     ¡

    ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = a
           & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)') )
           ⇒ (R´n) = (a+n) )
                                          ,! 65 (⇒E: 61,64)   ¡
```

(ω[**a**] & (**R**´0) = **a**
  & ∀i (<[i,**n**] ⇒ (**R**´(i')) = ((**R**´i)'))
  ⇒ (**R**´**n**) = (**a**+**n**))
                                        ,! 66 (∀E: 65) ¡

ω[**a**] & (**R**´0) = **a** & ∀i (<[i,**n**] ⇒ (**R**´(i')) = ((**R**´i)'))
⇒ (**R**´**n**) = (**a**+**n**)
                                        ,! 67 (()E: 66) ¡

(**R**´**n**) = (**a**+**n**)   ,! 68 (⇒E: 62,67) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] & (**R**´0) = **a** & ∀i (<[i,**n**] ⇒ (**R**´(i')) = ((**R**´i)'))
⇒ (**R**´**n**) = (**a**+**n**)
                                        ,! 69 (⇒I: 60,68) ¡

(ω[**n**] & ω[**a**] & (**R**´0) = **a**
  & ∀i (<[i,**n**] ⇒ (**R**´(i')) = ((**R**´i)'))
  ⇒ (**R**´**n**) = (**a**+**n**))
                                        ,! 70 (()I: 69) ¡

∀n∀R∀a (ω[n] & ω[a] & (R´0) = a
         & ∀i (<[i,n] ⇒ (R´(i')) = ((R´i)'))
         ⇒ (R´n) = (a+n))
                                         ! 71 (∀I: 1,70) ¡

□

! **2. THE SECOND FUNDAMENTAL THEOREM OF ARITHMETIC (THE MAJOR).** Multiplication is repeated addition. ¡

⊢ ∀n∀R∀a (ω[n] & ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i (<[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a))
           ⇒ (R´n) = (n x a)) ¡

! We first prove by induction that

∀n (ω[n]
     ⇒ ∀R∀a (ω[a] & (R´0) = 0
              & ∀i (<[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a))
              ⇒ (R´n) = (n x a)))

taking ϕ to be

∀R∀a (ω[a] & (R´0) = 0
       & ∀i (<[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a))
       ⇒ (R´n) = (n x a)).

It must be shown that

∀R∀a (ω[a] & (R´0) = 0
       & ∀i (<[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a))
       ⇒ (R´0) = (0 x a))

and

```
    ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
           & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
                    & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                    ⇒ (R´n) = (n x a) )
           ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
                     & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                     ⇒ (R´m) = (m x a) ) )                          ¡
```

! To prove:

```
    ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´0) = (0 x a) )                                      ¡
```

```
  R,a                                          ,! 1 (Prem)         ¡

    ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                               ,! 2 (Prem)         ¡

    ω[a]                                       ,! 3 (&E: 2)        ¡

    (R´0) = 0                                  ,! 4 (&E: 2)        ¡

    ( ω[a] ⇒ (a x 0) = 0 )                     ,! 5 (∀E: C8.4)     ¡

    ω[a] ⇒ (a x 0) = 0                         ,! 6 (()E: 5)       ¡

    (a x 0) = 0                                ,! 7 (⇒E: 3,6)      ¡

    (R´0) = (a x 0)                            ,! 8 (=E: 4,7)      ¡

  ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
  ⇒ (R´0) = (a x 0)
                                               ,! 9 (⇒I: 2,8)      ¡

  ( ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
    ⇒ (R´0) = (a x 0) )
                                               ,! 10 (()I: 9)      ¡

∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,0] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
       ⇒ (R´0) = (a x 0) )
                                               ,! 11 (∀I: 1,10)    ¡
```

! To prove:

```
    ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
           & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
                    & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                    ⇒ (R´n) = (n x a) )
           ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
                     & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
```

```
                    ⇒ (R´m) = (m x a) ) )                              ¡

n,m                                          ,! 12 (Prem)              ¡

  ω[n] & σ[n,m]
  & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                             ,! 13 (Prem)              ¡

  ω[n] & σ[n,m]                              ,! 14 (&E: 13)            ¡

  ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                             ,! 15 (&E: 13)            ¡

  ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1) )            ,! 16 (∀E: C2.48)         ¡

  ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1)                ,! 17 (()E: 16)           ¡

  m = (n + 1)                                ,! 18 (⇒E: 14,17)         ¡

  ( ω[n] & σ[n,m] ⇒ <[n,m] )                 ,! 19 (∀E: C4.31)         ¡

  ω[n] & σ[n,m] ⇒ <[n,m]                     ,! 20 (()E: 19)           ¡

  <[n,m]                                     ,! 21 (⇒E: 14,20)         ¡

    R,a                                      ,! 22 (Prem)              ¡

      ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                             ,! 23 (Prem)              ¡

      ω[a] & (R´0) = 0                       ,! 24 (&E: 23)            ¡

      ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                             ,! 25 (&E: 23)            ¡

        i                                    ,! 26 (Prem)              ¡

          <[i,n]                             ,! 27 (Prem)              ¡

          <[i,n] & <[n,m]                    ,! 28 (&I: 21,27)         ¡

          ( <[i,n] & <[n,m] ⇒ <[i,m] )       ,! 29 (∀E: C4.18)         ¡

          <[i,n] & <[n,m] ⇒ <[i,m]           ,! 30 (()E: 29)           ¡

          <[i,m]                             ,! 31 (⇒E: 28,30)         ¡

          ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                             ,! 32 (∀E: 25)            ¡

          <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a)
```

```
                                          ,! 33 ()E: 32)     ¡

    (R´(i+1)) = ((R´i)+a)                 ,! 34 (⇒E: 31,33)  ¡

  <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a)          ,! 35 (⇒I: 27,34)  ¡

  ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                          ,! 36 ()I: 35)     ¡

∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                          ,! 37 (∀I: 26,36)  ¡

ω[a] & (R´0) = a
& ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                          ,! 38 (&I: 24,37)  ¡

! Applying the induction hypothesis...                       ¡

( ω[a] & (R´0) = a
  & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
  ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                          ,! 39 (∀E: 15)     ¡

ω[a] & (R´0) = a
& ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
⇒ (R´n) = (n x a)
                                          ,! 40 ()E: 39)     ¡

(R´n) = (n x a)                           ,! 41 (⇒E: 38,40)  ¡

( <[n,m] ⇒ (R´(n+1)) = ((R´n)+a) )
                                          ,! 42 (∀E: 25)     ¡

<[n,m] ⇒ (R´(n+1)) = ((R´n)+a)            ,! 43 ()E: 42)     ¡

(R´(n+1)) = ((R´n)+a)                     ,! 44 (⇒E: 21,43)  ¡

(R´(n+1)) = ((n x a) + a)                 ,! 45 (=E: 41,44)  ¡

ω[n] & ω[a]                               ,! 46 (𝕋E: C7.9,41)¡

( ω[n] & ω[a] ⇒ ((n + 1) x a) = ((n x a) + a) )
                                          ,! 47 (∀E: C8.17)  ¡

ω[n] & ω[a] ⇒ ((n + 1) x a) = ((n x a) + a)
                                          ,! 48 ()E: 47)     ¡

((n + 1) x a) = ((n x a) + a)             ,! 49 (⇒E: 46,48)  ¡

(R´(n+1)) = ((n + 1) x a)                 ,! 50 (=E: 45,49)  ¡

(R´m) = (m x a)                           ,! 51 (=E: 18,50)  ¡

ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
```

```
      ⇒ (R´m) = (m x a)
                                          ,! 52 (⇒I: 23,51)  ¡

      ( ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
        ⇒ (R´m) = (m x a) )
                                          ,! 53 (()I: 52)    ¡

    ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´m) = (m x a) )
                                          ,! 54 (∀I: 22,53)  ¡

  ω[n] & σ[n,m]
  & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´n) = (n x a) )
  ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´m) = (m x a) )
                                          ,! 55 (⇒I: 13,54)  ¡

  ( ω[n] & σ[n,m]
    & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´n) = (n x a) )
    ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´m) = (m x a) ) )
                                          ,! 56 (()I: 55)    ¡

∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
    & ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´n) = (n x a) )
    ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,m] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´m) = (m x a) ) )
                                          ,! 57 (∀I: 12,56)  ¡


∀n ( ω[n]
     ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
              & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
              ⇒ (R´n) = (n x a) ) )
                                          ,! 58 (Induct: 11,57)
                                                             ¡
  n,R,a                                   ,! 59 (Prem)       ¡
```

```
  ω[n] & ω[a] & (R´0) = 0
  & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                        ,! 60 (Prem)        ¡

  ω[n]                                  ,! 61 (&E: 60)      ¡

  ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
                                        ,! 62 (&E: 60)      ¡

  ( ω[n]
    ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
             & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
             ⇒ (R´n) = (n x a) ) )
                                        ,! 63 (∀E: 58)      ¡

  ω[n]
  ⇒ ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
           & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
           ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                        ,! 64 (()E: 63)     ¡

  ∀R∀a ( ω[a] & (R´0) = 0
         & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
         ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                        ,! 65 (⇒E: 61,64)   ¡

  ( ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
    ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                        ,! 66 (∀E: 65)      ¡

  ω[a] & (R´0) = 0 & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
  ⇒ (R´n) = (n x a)
                                        ,! 67 (()E: 66)     ¡

  (R´n) = (n x a)                       ,! 68 (⇒E: 62,67)   ¡

ω[n] & ω[a] & (R´0) = 0
& ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
⇒ (R´n) = (n x a)
                                        ,! 69 (⇒I: 60,68)   ¡

( ω[n] & ω[a] & (R´0) = 0
  & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
  ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                        ,! 70 (()I: 69)     ¡

∀n∀R∀a ( ω[n] & ω[a] & (R´0) = 0
         & ∀i ( <[i,n] ⇒ (R´(i+1)) = ((R´i)+a) )
         ⇒ (R´n) = (n x a) )
                                         ! 71 (∀I: 59,70)   ¡
```