!CHAPTER 3

INEQUALITY¡

! This chapter asserts and proves many of the basic laws of inequality. Highlights include:

the Fundamental Laws (P14 through P19),
Transitivity (P20),
Antisymmetry (P22),
the Additive Cancellation Laws (P42 and P43),
Dichotomy (P64), and
the Well-Ordering Principle (P73).

The two axioms concerning inequality are used once each, in the proofs of P9 and P10. In turn only the Fundamental Laws and Dichotomy appeal to P9 and P10 (although indeed there is an alternative proof of Dichotomy which avoids this use). ¡

! **1.** The inequality relationship Λ is not explicitly restricted to the finite numbers. ≤ is so restricted. ¡

𝔻 ≤ ; ≤ ; ; {x,y : ω[x] & ω[y] & Λ[x,y]} ¡

! **2.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ω[n] & ω[m] & Λ[n,m]) ¡

∀n∀m ({x,y : ω[x] & ω[y] & Λ[x,y]}[n,m] ⇔ ω[n] & ω[m] & Λ[n,m])
,! 1 (Pred) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ω[n] & ω[m] & Λ[n,m]) ! 2 (𝔻E: P1,1) ¡

□

! **3.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m] & Λ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇔ ω[**m**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

≤[**n**,**m**] ⇔ ω[**m**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 3 (()E: 2) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m] & Λ[n,m]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

□

! **4.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & Λ[n,m] ⇒ ≤[n,m]) ¡

a,**b** ,! 1 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇔ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**]) ,! 2 (∀E: P2) ¡

≤[**n**,**m**] ⇔ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 3 (()E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & Λ[n,m] ⇒ ≤[n,m]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n] & ω[m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 3 (∀E: P5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] ,! 6 (&E: 5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[n]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **7.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 3 (∀E: P5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ω[m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **8.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ Λ[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**]) ,! 3 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & Λ[**n**,**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

Λ[**n**,**m**] ,! 6 (&E: 5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ Λ[**n**,**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ Λ[**n**,**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ Λ[n,m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **9.** P9 reformulates Ineq1 in terms of our logical language. ¡

⊦ ∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & ♑[n,A] & ♑[m,B] & A ⊆ B ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,m,A,B ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & A ⊆ B
,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] ,! 4 (&E: 2) ¡

A ⊆ B ,! 5 (&E: 2) ¡

∀x (A[x] ⇒ B[x]) ,! 6 (𝕊E: II1.1,5) ¡

𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & ∀x (A[x] ⇒ B[x]) ,! 7 (&I: 4,6) ¡

(𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & ∀x (A[x] ⇒ B[x]) ⇒ Λ[n,m])
,! 8 (∀E: Ineq1) ¡

𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & ∀x (A[x] ⇒ B[x]) ⇒ Λ[n,m]
,! 9 (()E: 8) ¡

Λ[n,m] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[n] & ω[m] & Λ[n,m] ,! 11 (&I: 3,10) ¡

(ω[n] & ω[m] & Λ[n,m] ⇒ ≤[n,m]) ,! 12 (∀E: P4) ¡

ω[n] & ω[m] & Λ[n,m] ⇒ ≤[n,m] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[n,m] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & A ⊆ B ⇒ ≤[n,m]
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & A ⊆ B ⇒ ≤[n,m])
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀A∀B (ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & A ⊆ B ⇒ ≤[n,m])
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **10.** P10 reformulates Ineq2 in terms of our logical language.
¡

⊢ ∀n∀m∀A∀B (≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & B ⊆ A ⇒ A ≡ B) ¡

n,m,A,B ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & B ⊆ A ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] ,! 4 (&E: 2) ¡

B ⊆ **A** ,! 5 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ Λ[**n**,**m**]) ,! 6 (∀E: P8) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ Λ[**n**,**m**] ,! 7 (()E: 6) ¡

Λ[**n**,**m**] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

Λ[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] ,! 9 (&I: 4,8) ¡

∀x (**B**[x] ⇒ **A**[x]) ,! 10 ($E: II1.1,5) ¡

Λ[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & ∀x (**B**[x] ⇒ **A**[x])
,! 11 (&I: 9,10) ¡

(Λ[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & ∀x (**B**[x] ⇒ **A**[x])
⇒ ∀x (**A**[x] ⇔ **B**[x]))
,! 12 (∀E: Ineq2) ¡

Λ[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & ∀x (**B**[x] ⇒ **A**[x])
⇒ ∀x (**A**[x] ⇔ **B**[x])
,! 13 (()E: 12) ¡

∀x (**A**[x] ⇔ **B**[x]) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

A ≡ **B** ,! 15 ($E: II1.7,14)
¡

≤[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & **B** ⊆ **A** ⇒ **A** ≡ **B**
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] & ♏[**m**,**B**] & **B** ⊆ **A** ⇒ **A** ≡ **B**)
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀A∀B (≤[n,m] & ♏[n,A] & ♏[m,B] & B ⊆ A ⇒ A ≡ B)
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! P11 through P13 say that it is possible to find predicates of sizes appropriate to an inequality. P13 will be used in the proof of the Fundamental Laws. ¡

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀m∀A (≤[n,m] & ♏[n,A] ⇒ ∃B (♏[m,B] & A ⊆ B)) ¡

n,**m**,**A** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ♏[**n**,**A**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 4 (∀E: P7) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[m] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[m] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(ω[m] ⇒ ∃Q (𝔑[m,Q] & (A ⊆ Q ∨ Q ⊆ A)))
,! 7 (∀E: IV7.20) ¡

ω[m] ⇒ ∃Q (𝔑[m,Q] & (A ⊆ Q ∨ Q ⊆ A))
,! 8 (()E: 7) ¡

∃Q (𝔑[m,Q] & (A ⊆ Q ∨ Q ⊆ A)) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(𝔑[m,B] & (A ⊆ B ∨ B ⊆ A)) ,! 10 (∃E: 9) ¡

𝔑[m,B] & (A ⊆ B ∨ B ⊆ A) ,! 11 (()E: 10) ¡

𝔑[m,B] ,! 12 (&E: 11) ¡

(A ⊆ B ∨ B ⊆ A) ,! 13 (&E: 11) ¡

A ⊆ B ∨ B ⊆ A ,! 14 (()E: 13) ¡

! To show: A ⊆ B ¡

A ⊆ B ,! 15 (Prem) ¡

A ⊆ B ⇒ A ⊆ B ,! 16 (⇒I: 15,15) ¡

B ⊆ A ,! 17 (Prem) ¡

≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] ,! 18 (&I: 2,12) ¡

≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & B ⊆ A ,! 19 (&I: 17,18) ¡

(≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & B ⊆ A ⇒ A ≡ B)
,! 20 (∀E: P10) ¡

≤[n,m] & 𝔑[n,A] & 𝔑[m,B] & B ⊆ A ⇒ A ≡ B
,! 21 (()E: 20) ¡

A ≡ B ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(A ≡ B ⇒ A ⊆ B) ,! 23 (∀E: II1.11) ¡

A ≡ B ⇒ A ⊆ B ,! 24 (()E: 23) ¡

A ⊆ B ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

B ⊆ A ⇒ A ⊆ B ,! 26 (⇒I: 17,25) ¡

A ⊆ B ,! 27 (∨E: 14,16,26)
¡

𝔑[m,B] & A ⊆ B ,! 28 (&I: 12,27) ¡

(𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**) ,! 29 (()I: 28) ¡

∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B) ,! 30 (∃I: 29) ¡

≤[**n**,**m**] & 𝔑[**n**,**A**] ⇒ ∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B) ,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(≤[**n**,**m**] & 𝔑[**n**,**A**] ⇒ ∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B))
,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m∀A (≤[n,m] & 𝔑[n,A] ⇒ ∃B (𝔑[m,B] & A ⊆ B))
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀n∀m∀B (≤[n,m] & 𝔑[m,B] ⇒ ∃A (𝔑[n,A] & A ⊆ B)) ¡

n,**m**,**A** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & 𝔑[**m**,**B**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**]) ,! 4 (∀E: P6) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**n**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**B** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **B**)))
,! 7 (∀E: IV7.20) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**B** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **B**))
,! 8 (()E: 7) ¡

∃Q (𝔑[**n**,Q] & (**B** ⊆ Q ∨ Q ⊆ **B**)) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(𝔑[**n**,**A**] & (**B** ⊆ **A** ∨ **A** ⊆ **B**)) ,! 10 (∃E: 9) ¡

𝔑[**n**,**A**] & (**B** ⊆ **A** ∨ **A** ⊆ **B**) ,! 11 (()E: 10) ¡

𝔑[**n**,**A**] ,! 12 (&E: 11) ¡

(**B** ⊆ **A** ∨ **A** ⊆ **B**) ,! 13 (&E: 11) ¡

B ⊆ **A** ∨ **A** ⊆ **B** ,! 14 (()E: 13) ¡

! To show: **B** ⊆ **A** ¡

B ⊆ **A** ,! 15 (Prem) ¡

B ⊆ **A** ⇒ **B** ⊆ **A** ,! 16 (⇒I: 15,15) ¡

A ⊆ **B** ,! 17 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] ,! 18 (&I: 2,12) ¡

≤[**n**,**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ⊆ **A** ,! 19 (&I: 17,18) ¡

(≤[**n**,**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ⊆ **A** ⇒ **A** ≡ **B**)
,! 20 (∀E: P10) ¡

≤[**n**,**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **B** ⊆ **A** ⇒ **A** ≡ **B**
,! 21 (()E: 20) ¡

A ≡ **B** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(**A** ≡ **B** ⇒ **B** ⊆ **A**) ,! 23 (∀E: II1.12) ¡

A ≡ **B** ⇒ **B** ⊆ **A** ,! 24 (()E: 23) ¡

B ⊆ **A** ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

A ⊆ **B** ⇒ **B** ⊆ **A** ,! 26 (⇒I: 17,25) ¡

B ⊆ **A** ,! 27 (∨E: 14,16,26)
¡

ℕ[**n**,**A**] & **B** ⊆ **A** ,! 28 (&I: 12,27) ¡

(ℕ[**n**,**A**] & **B** ⊆ **A**) ,! 29 (()I: 28) ¡

∃A (ℕ[**n**,A] & **B** ⊆ A) ,! 30 (∃I: 29) ¡

≤[**n**,**m**] & ℕ[**m**,**B**] ⇒ ∃A (ℕ[**n**,A] & **B** ⊆ A) ,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(≤[**n**,**m**] & ℕ[**m**,**B**] ⇒ ∃A (ℕ[**n**,A] & **B** ⊆ A))
,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m∀B (≤[n,m] & ℕ[m,B] ⇒ ∃A (ℕ[n,A] & A ⊆ B))
! 33 (∀I: 1,32) ¡

□

! **13.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃A∃B (ℕ[n,A] & ℕ[m,B] & A ⊆ B)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**]) ,! 3 (∀E: P6) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P]) ,! 6 (∀E: IV7.8) ¡

ω[**n**] ⇒ ∃P 𝔑[**n**,P] ,! 7 (()E: 6) ¡

∃P 𝔑[**n**,P] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

𝔑[**n**,**A**] ,! 9 (∃E: 8) ¡

≤[**n**,**m**] & 𝔑[**n**,**A**] ,! 10 (&I: 2,9) ¡

(≤[**n**,**m**] & 𝔑[**n**,**A**] ⇒ ∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B))
,! 11 (∀E: P11) ¡

≤[**n**,**m**] & 𝔑[**n**,**A**] ⇒ ∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B)
,! 12 (()E: 11) ¡

∃B (𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**) ,! 14 (∃E: 13) ¡

𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B** ,! 15 (()E: 14) ¡

𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B** ,! 16 (&I: 9,15) ¡

(𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**) ,! 17 (()I: 16) ¡

∃B (𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B) ,! 18 (∃I: 17) ¡

∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B) ,! 19 (∃I: 18) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B)
,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B))
,! 21 (()I: 20) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B))
! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! The Fundamental Laws, P18 and P19, are commutative permutatons.
P14-15 and P16-P17 express one half of the biconditional.
P14 and P15 rely on P10, while P16 and P17 rely on P9. ¡

! **14.** Fundamental Law of Inequality, First Half, n1. ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃k (k + n) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 3 (∀E: P5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & A ⊆ B))
,! 6 (∀E: P13) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & A ⊆ B)
,! 7 (()E: 6) ¡

∃A∃B (ℕ[**n**,A] & ℕ[**m**,B] & A ⊆ B) ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

∃B (ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,B] & **A** ⊆ B) ,! 9 (∃E: 8) ¡

(ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**) ,! 10 (∃E: 9) ¡

ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B** ,! 11 (()E: 10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**
,! 12 (&I: 5,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**
⇒ ∃k ((k + **n**) = **m** & ℕ[k,(**B** \ **A**)]))
,! 13 (∀E: C1.21) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**A**] & ℕ[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B**
⇒ ∃k ((k + **n**) = **m** & ℕ[k,(**B** \ **A**)])
,! 14 (()E: 13) ¡

∃k ((k + **n**) = **m** & ℕ[k,(**B** \ **A**)]) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((**k** + **n**) = **m** & ℕ[**k**,(**B** \ **A**)]) ,! 16 (∃E: 15) ¡

(**k** + **n**) = **m** & ℕ[**k**,(**B** \ **A**)] ,! 17 (()E: 16) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 18 (&E: 17) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ,! 19 (∃E: 18) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m** ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m**) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃k (k + n) = m) ! 22 (∀I: 21) ¡

□

! **15.** Fundamental Law of Inequality, First Half, n2. ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃k (n + k) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m**) ,! 3 (∀E: P14) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**k** + **n**) = **m** ⇒ (**n** + **k**) = **m**) ,! 7 (∀E: C2.6) ¡

(**k** + **n**) = **m** ⇒ (**n** + **k**) = **m** ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 10 (∃I: 9) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ∃k (n + k) = m) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **16.** Fundamental Law of Inequality, Second Half, n1. ¡

⊢ ∀n∀m (∃k (k + n) = m ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ,! 2 (Prem) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 3 (∃E) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 4 (𝕋E: C1.7, 3) ¡

ω[**n**] ,! 5 (&E) ¡

((**k** + **n**) = **m** ⇒ ω[**m**]) ,! 6 (∀E C1.10) ¡

(**k** + **n**) = **m** ⇒ ω[**m**] ,! 7 (()E) ¡

ω[**m**] ,! 8 (⇒E) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

m = **m** ,! 10 (=I) ¡

m = (**k** + **n**) ,! 11 (=E: 3,10) ¡

(**m** = (**k** + **n**)
⇒ ∃A∃B (ℿ[**k**,A] & ℿ[**n**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℿ[**m**,(A ∪ B)]))
,! 12 (∀E: C1.19) ¡

m = (**k** + **n**)

⇒ ∃A∃B (ℕ[**k**,A] & ℕ[**n**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[**m**,(A ∪ B)])
,! 13 (()E: 12) ¡

∃A∃B (ℕ[**k**,A] & ℕ[**n**,B] & (A ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[**m**,(A ∪ B)])
,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

∃B (ℕ[**k**,**A**] & ℕ[**n**,B] & (**A** ∩ B) ≡ ϕ & ℕ[**m**,(**A** ∪ B)])
,! 15 (∃E: 14) ¡

(ℕ[**k**,**A**] & ℕ[**n**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)])
,! 16 (∃E: 15) ¡

ℕ[**k**,**A**] & ℕ[**n**,**B**] & (**A** ∩ **B**) ≡ ϕ & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)]
,! 17 (()E: 16) ¡

ℕ[**n**,**B**] ,! 18 (&E: 17) ¡

ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)] ,! 19 (&E: 17) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**B**] ,! 20 (&I: 9,18) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**B**] & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)] ,! 21 (&I: 19,20) ¡

B ⊆ (**A** ∪ **B**) ,! 22 (∀E: II2.13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**B**] & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)] & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**)
,! 23 (&I: 21,22) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**B**] & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)] & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**)
⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 24 (∀E: P9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℕ[**n**,**B**] & ℕ[**m**,(**A** ∪ **B**)] & **B** ⊆ (**A** ∪ **B**)
⇒ ≤[**n**,**m**]
,! 25 (()E: 24) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 28 (()I: 27) ¡

∀n∀m (∃k (k + n) = m ⇒ ≤[n,m]) ! 29 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **17.** Fundamental Law of Inequality, Second Half, n2. ¡

⊢ ∀n∀m (∃k (n + k) = m ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 2 (Prem) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 3 (∃E: 2) ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**k** + **n**) = **m**) ,! 4 (∀E: C2.6) ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**k** + **n**) = **m** ,! 5 (()E: 4) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ,! 7 (∃I: 6) ¡

(∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 8 (∀E: P16) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (∃k (n + k) = m ⇒ ≤[n,m]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **18. Fundamental Law of Inequality, n1.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ∃k (k + n) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m**) ,! 2 (∀E: P14) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (k + **n**) = **m** ,! 3 (()E: 2) ¡

(∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 4 (∀E: P16) ¡

∃k (k + **n**) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,**m**] ⇔ ∃k (k + **n**) = **m** ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇔ ∃k (k + **n**) = **m**) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ∃k (k + n) = m) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! **19. Fundamental Law of Inequality, n2.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ∃k (n + k) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 2 (∀E: P15) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 3 (()E: 2) ¡

(∃k (n + k) = m ⇒ ≤[n,m]) ,! 4 (∀E: P17) ¡

∃k (n + k) = m ⇒ ≤[n,m] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[n,m] ⇔ ∃k (n + k) = m ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

(≤[n,m] ⇔ ∃k (n + k) = m) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇔ ∃k (n + k) = m) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **20. Transitivity of Inequality.** ¡

⊢ ∀n∀m∀a (≤[n,m] & ≤[m,a] ⇒ ≤[n,a]) ¡

n,m,a ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ≤[m,a] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[m,a] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ∃k (n + k) = m) ,! 5 (∀E: P15) ¡

≤[n,m] ⇒ ∃k (n + k) = m ,! 6 (()E: 5) ¡

∃k (n + k) = m ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(n + x) = m ,! 8 (∃E: 7) ¡

(≤[m,a] ⇒ ∃k (m + k) = a) ,! 9 (∀E: P15) ¡

≤[m,a] ⇒ ∃k (m + k) = a ,! 10 (()E: 9) ¡

∃k (m + k) = a ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

(m + k) = a ,! 12 (∃E: 11) ¡

((n + x) + k) = a ,! 13 (=E: 8,12) ¡

(((n + x) + k) = a ⇒ (n + (x + k)) = a)
,! 14 (∀E: C2.16) ¡

((n + x) + k) = a ⇒ (n + (x + k)) = a
,! 15 (()E: 14) ¡

(n + (x + k)) = a ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

∃k (n + k) = a ,! 17 (∃I: 16) ¡

(∃k (n + k) = a ⇒ ≤[n,a]) ,! 18 (∀E: P17) ¡

∃k (n + k) = a ⇒ ≤[n,a] ,! 19 (()E: 18) ¡

≤[**n**,**a**] ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**a**] ⇒ ≤[**n**,**a**] ,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**a**] ⇒ ≤[**n**,**a**]) ,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀m∀a (≤[n,m] & ≤[m,a] ⇒ ≤[n,a]) ! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! **21.** Transitivity can be extended to longer chains of inequalities, here of length three. ¡

⊦ ∀v∀n∀m∀z (≤[v,n] & ≤[n,m] & ≤[m,z] ⇒ ≤[v,z]) ¡

v,**n**,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**z**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[**v**,**m**]) ,! 5 (∀E: P20) ¡

≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[**v**,**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**v**,**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

≤[**v**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(≤[**v**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ⇒ ≤[**v**,**z**]) ,! 9 (∀E: P20) ¡

≤[**v**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ⇒ ≤[**v**,**z**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**v**,**z**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ⇒ ≤[**v**,**z**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[**v**,**n**] & ≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**z**] ⇒ ≤[**v**,**z**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀v∀n∀m∀z (≤[v,n] & ≤[n,m] & ≤[m,z] ⇒ ≤[v,z])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **22. Antisymmetry of Inequality.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**n**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 5 (∀E: P15) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(**n** + **a**) = **m** ,! 8 (∃E: 7) ¡

(≤[**m**,**n**] ⇒ ∃k (**m** + k) = **n**) ,! 9 (∀E: P15) ¡

≤[**m**,**n**] ⇒ ∃k (**m** + k) = **n** ,! 10 (()E: 9) ¡

∃k (**m** + k) = **n** ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

(**m** + **b**) = **n** ,! 12 (∃E: 11) ¡

((**m** + **b**) + **a**) = **m** ,! 13 (=E: 8,12) ¡

(((**m** + **b**) + **a**) = **m** ⇒ (**m** + (**b** + **a**)) = **m**) ,! 14 (∀E: C2.16) ¡

((**m** + **b**) + **a**) = **m** ⇒ (**m** + (**b** + **a**)) = **m** ,! 15 (()E: 14) ¡

(**m** + (**b** + **a**)) = **m** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

ω[**m**] & ω[(**b** + **a**)] ,! 17 (𝕋E: C1.7,16) ¡

ω[(**b** + **a**)] ,! 18 (&E: 17) ¡

ω[**b**] & ω[**a**] ,! 19 (𝕋E: C1.7,18) ¡

((**m** + (**b** + **a**)) = **m** ⇒ (**b** + **a**) = 0) ,! 20 (∀E: C2.38; (**b** + **a**) : C1.7,19) ¡

(**m** + (**b** + **a**)) = **m** ⇒ (**b** + **a**) = 0 ,! 21 (()E: 20) ¡

(**b** + **a**) = 0 ,! 22 (⇒E: 16,21) ¡

((**b** + **a**) = 0 ⇒ **a** = 0) ,! 23 (∀E: C2.53) ¡

(**b** + **a**) = 0 ⇒ **a** = 0 ,! 24 (()E: 23) ¡

a = 0 ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

(**n** + 0) = **m** ,! 26 (=E: 8,25) ¡

((**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m**) ,! 27 (∀E: C2.34) ¡

(**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m** ,! 28 (()E: 27) ¡

n = **m** ,! 29 (⇒E: 26,28) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**n**] ⇒ **n** = **m** ,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**n**] ⇒ **n** = **m**) ,! 31 (()I: 30) ¡

∀n∀m (≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m) ! 32 (∀I: 1,31) ¡

□

! **23. Reflexivity of Inequality.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ ≤[n,n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n**) ,! 3 (∀E: C2.32) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** + 0) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃k (**n** + k) = **n** ,! 6 (∃I: 5) ¡

(∃k (**n** + k) = **n** ⇒ ≤[**n**,**n**]) ,! 7 (∀E: P17) ¡

∃k (**n** + k) = **n** ⇒ ≤[**n**,**n**] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[**n**,**n**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,**n**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,**n**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ≤[n,n]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **24.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ ≤[0,n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (0 + **n**) = **n**) ,! 3 (∀E: C2.33) ¡

ω[**n**] ⇒ (0 + **n**) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(0 + **n**) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃k (0 + k) = **n** ,! 6 (∃I: 5) ¡

(∃k (0 + k) = **n** ⇒ ≤[0,**n**]) ,! 7 (∀E: P17) ¡

∃k (0 + k) = **n** ⇒ ≤[0,**n**] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[0,**n**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[0,**n**] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[0,**n**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ≤[0,n]) ,! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **25.** ¡

⊢ ∀n (≤[n,0] ⇒ n = 0) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,0] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,0] ⇒ ∃k (**n** + k) = 0) ,! 3 (∀E: P19) ¡

≤[**n**,0] ⇒ ∃k (**n** + k) = 0 ,! 4 (()E: 3) ¡

∃k (**n** + k) = 0 ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**n** + **z**) = 0 ,! 6 (∃E: 5) ¡

((**n** + **z**) = 0 ⇒ **n** = 0) ,! 7 (∀E: C2.54) ¡

(**n** + **z**) = 0 ⇒ **n** = 0 ,! 8 (()E: 7) ¡

n = 0 ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[**n**,0] ⇒ **n** = 0 ,! 10 (⇒I: 9) ¡

(≤[**n**,0] ⇒ **n** = 0) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (≤[n,0] ⇒ n = 0) ,! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **26.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[m,n] & ¬ m = 0 ⇒ ¬ n = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,**n**] & ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **m** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

≤[**m**,0] ,! 6 (=E: 3,5) ¡

(≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0) ,! 7 (∀E: P25) ¡

≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0 ,! 8 (()E: 7) ¡

m = 0 ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ℑ ,! 10 (ℑI: 4,9) ¡

n = 0 ⇒ ℑ ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬ **n** = 0 ,! 12 (¬I: 11) ¡

≤[**m**,**n**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**m**,**n**] & ¬ **m** = 0 ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m (≤[m,n] & ¬ m = 0 ⇒ ¬ n = 0) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **27.** ¡

⊢ ∀n (≤[1,n] ⇒ ¬ n = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[1,**n**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[1,**n**] & ¬ 1 = 0 ,! 3 (&I: IV9.6,2) ¡

(≤[1,**n**] & ¬ 1 = 0 ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 4 (∀E: P26) ¡

≤[1,**n**] & ¬ 1 = 0 ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

¬ **n** = 0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[1,**n**] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[1,**n**] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n (≤[1,n] ⇒ ¬ n = 0) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! P28 through P30 say that addition maintains inequality. ¡

! **28.** ¡

⊢ ∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[(n + z),(m + z)]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**z**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 5 (∀E: P15) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**n** + **a**) = **m** ,! 8 (∃E: 7) ¡

((**n** + **a**) = **m** ⇒ ω[**m**]) ,! 9 (∀E: C1.10) ¡

(**n** + **a**) = **m** ⇒ ω[**m**] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[**m**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 12 (&I: 4,11) ¡

(**m** + **z**) = (**m** + **z**) ,! 13 (=I: C1.7,12) ¡

((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ,! 14 (=E: 8,13) ¡

(((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ⇒ ((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**))
,! 15 (∀E: C2.20;
(**m** + **z**): C1.7,12) ¡

((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ⇒ ((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**)
,! 16 (()E: 15) ¡

((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**) ,! 18 (∃I: 17) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] ,! 19 (𝕋E: C1.7,8) ¡

ω[**n**] ,! 20 (&E: 19) ¡

ω[**n**] & ω[**z**] ,! 21 (&I: 4,20) ¡

(∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**) ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)])
,! 22 (∀E: P17;
(**n** + **z**): C1.7,21;
(**m** + **z**): C1.7,12) ¡

∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**) ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)]
,! 23 (()E: 22) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 24 (⇒E: 18,23) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)]) ,! 26 (()I: 25) ¡

∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[(n + z),(m + z)])

! 27 (∀I: 1,26) ¡

□

! **29.** ¡

⊦ ∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[(z + n),(z + m)]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)])
,! 3 (∀E: P28) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**z**] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**z**] ⇒ (**n** + **z**) = (**z** + **n**)) ,! 7 (∀E: C2.5) ¡

ω[**n**] & ω[**z**] ⇒ (**n** + **z**) = (**z** + **n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** + **z**) = (**z** + **n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 10 (𝕋E: C1.7,5) ¡

(ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**)) ,! 11 (∀E: C2.5) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 12 (()E: 11) ¡

(**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[(**z** + **n**),(**m** + **z**)] ,! 14 (=E: 5,9) ¡

≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)] ,! 15 (=E: 13,14) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[(z + n),(z + m)])
! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! **30.** ¡

⊦ ∀n∀m∀u∀v (≤[n,m] & ≤[u,v] ⇒ ≤[(n + u),(m + v)]) ¡

n,**m**,**u**,**v** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**u**,**v**] ,! 2 (Prem) ¡

```
≤[n,m]                                      ,! 3 (&E: 2)          ¡
≤[u,v]                                      ,! 4 (&E: 2)          ¡
( ≤[u,v] ⇒ ω[u] )                           ,! 5 (∀E: P6)         ¡
≤[u,v] ⇒ ω[u]                               ,! 6 (()E: 5)         ¡
ω[u]                                        ,! 7 (⇒E: 4,6)        ¡
≤[n,m] & ω[u]                               ,! 8 (&I: 3,7)        ¡
( ≤[n,m] & ω[u] ⇒ ≤[(n + u),(m + u)] )
                                            ,! 9 (∀E: P28)        ¡
≤[n,m] & ω[u] ⇒ ≤[(n + u),(m + u)]          ,! 10 (()E: 9)        ¡
≤[(n + u),(m + u)]                          ,! 11 (⇒E: 8,10)      ¡
ω[m] & ω[u]                                 ,! 12 (𝕋E: C1.7,11)   ¡
ω[m]                                        ,! 13 (&E: 12)        ¡
≤[u,v] & ω[m]                               ,! 14 (&I: 4,13)      ¡
( ≤[u,v] & ω[m] ⇒ ≤[(m + u),(m + v)] )
                                            ,! 15 (∀E: P29)       ¡
≤[u,v] & ω[m] ⇒ ≤[(m + u),(m + v)]          ,! 16 (()E: 15)       ¡
≤[(m + u),(m + v)]                          ,! 17 (⇒E: 14,16)     ¡
≤[(n + u),(m + u)] & ≤[(m + u),(m + v)]
                                            ,! 18 (&I: 11,17)     ¡
ω[n] & ω[u]                                 ,! 19 (𝕋E: C1.7,11)   ¡
ω[m] & ω[v]                                 ,! 20 (𝕋E: C1.7,17)   ¡
( ≤[(n + u),(m + u)] & ≤[(m + u),(m + v)]
  ⇒ ≤[(n + u),(m + v)] )
                                            ,! 21 (∀E: P20;
                                            (n + u): C1.7,19;
                                            (m + u): C1.7,12;
                                            (m + v): C1.7,20)     ¡
≤[(n + u),(m + u)] & ≤[(m + u),(m + v)] ⇒ ≤[(n + u),(m + v)]
                                            ,! 22 (()E: 21)       ¡
≤[(n + u),(m + v)]                          ,! 23 (⇒E: 18,22)     ¡
≤[n,m] & ≤[u,v] ⇒ ≤[(n + u),(m + v)]        ,! 24 (⇒I: 2,23)      ¡
( ≤[n,m] & ≤[u,v] ⇒ ≤[(n + u),(m + v)] )
                                            ,! 25 (()I: 24)       ¡
```

∀n∀m∀u∀v (≤[n,m] & ≤[u,v] ⇒ ≤[(n + u),(m + v)])
! 26 (∀I: 1,25) ¡

▯

! P31 through P34 say that it is possible to maintain inequality by adding a finite number on the right-hand side. ¡

! **31.** ¡

⊦ ∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[n,(m + z)]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**z**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[**z**] ⇒ ≤[0,**z**]) ,! 4 (∀E: P24) ¡

ω[**z**] ⇒ ≤[0,**z**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[0,**z**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 7 (&E: 2) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[0,**z**] ,! 8 (&I: 6,7) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[0,**z**] ⇒ ≤[(**n** + 0),(**m** + **z**)])
,! 9 (∀E: P30) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[0,**z**] ⇒ ≤[(**n** + 0),(**m** + **z**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(**n** + 0),(**m** + **z**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ω[0] ,! 12 (𝕋E: C1.7,11) ¡

ω[**n**] ,! 13 (&E: 12) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n**) ,! 14 (∀E: C2.32) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n** ,! 15 (()E: 14) ¡

(**n** + 0) = **n** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

≤[**n**,(**m** + **z**)] ,! 17 (=E: 11,16) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **z**)] ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **z**)]) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[n,(m + z)]) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **32.** ¡

⊦ ∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[n,(z + m)]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **z**)]) ,! 3 (∀E: P31) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **z**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**n**,(**m** + **z**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

(ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**)) ,! 7 (∀E: C2.5) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[**n**,(**z** + **m**)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**z** + **m**)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**n**,(**z** + **m**)]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀z (≤[n,m] & ω[z] ⇒ ≤[n,(z + m)]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **33.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,(n + m)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,**n**]) ,! 5 (∀E: P23) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,**n**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**n**,**n**] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[**n**,**n**] & ω[**m**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(≤[**n**,**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)]) ,! 9 (∀E: P31) ¡

≤[**n**,**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**n**,(**n** + **m**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,(n + m)]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **34.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,(m + n)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)]) ,! 3 (∀E: P33) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + **m**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**n**,(**n** + **m**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** + **m**) = (**m** + **n**)) ,! 6 (∀E: C2.5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (**n** + **m**) = (**m** + **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** + **m**) = (**m** + **n**) ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

≤[**n**,(**m** + **n**)] ,! 9 (⇒E: 5,8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **n**)] ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,(**m** + **n**)]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,(m + n)]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! P35 through P39 are corollaries of P33 and P34. ¡

! **35.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ ≤[n,(n + 1)]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 3 (&I: IV9.2,2) ¡

(ω[**n**] & ω[1] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)]) ,! 4 (∀E: P33) ¡

ω[**n**] & ω[1] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,(**n** + 1)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ≤[n,(n + 1)]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **36.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1)) ,! 3 (∀E: C2.48) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ **m** = (**n** + 1) ,! 4 (()E: 3) ¡

m = (**n** + 1) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

! Appealing to P33 rather than P35 saves a step. ¡

(ω[**n**] & ω[1] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)]) ,! 7 (∀E: P33) ¡

ω[**n**] & ω[1] ⇒ ≤[**n**,(**n** + 1)] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[**n**,(**n** + 1)] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m] ⇒ ≤[n,m]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **37.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ ≤[1,(n + 1)]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[1] & ω[**n**] ,! 3 (&I: IV9.2,2) ¡

(ω[1] & ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n** + 1)]) ,! 4 (∀E: P34) ¡

ω[1] & ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n** + 1)] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[1,(**n** + 1)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n** + 1)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] ⇒ ≤[1,(**n** + 1)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n (ω[n] ⇒ ≤[1,(n + 1)]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **38.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ≤[1,n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃m (m + 1) = **n**) ,! 3 (∀E: C2.49) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃m (m + 1) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

∃m (m + 1) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**m** + 1) = **n** ,! 6 (⇒E: 5) ¡

ω[**m**] & ω[1] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

ω[**m**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[**m**] ⇒ ≤[1,(**m** + 1)]) ,! 9 (∀E: P37) ¡

ω[**m**] ⇒ ≤[1,(**m** + 1)] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[1,(**m** + 1)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[1,**n**] ,! 12 (=E: 6,11) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[1,**n**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[1,**n**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ ≤[1,n]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **39.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ n = 0 ∨ ≤[1,n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(**n** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ,! 3 (∀E: I3.4) ¡

n = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 4 (()E: 3) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

n = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 6 (∨I: 5) ¡

n = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 7 (⇒I: 5,6) ¡

¬ **n** = 0 ,! 8 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 9 (&E: 2,8) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[1,**n**]) ,! 10 (∀E: P38) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[1,**n**] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[1,**n**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

n = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 13 (∨I: 12) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ **n** = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 14 (⇒I: 8,13) ¡

n = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 15 (∨E: 4,7,14) ¡

ω[**n**] ⇒ **n** = 0 ∨ ≤[1,**n**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(ω[**n**] ⇒ **n** = 0 ∨ ≤[1,**n**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n (ω[n] ⇒ n = 0 ∨ ≤[1,n]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

□

! P40 and P41 say that an inequality is maintained upon removal of an addend from the left-hand side. ¡

! **40.** ¡

⊢ ∀n∀m∀z (≤[(m + z),n] ⇒ ≤[m,n]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m** + **z**),**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**m**,(**m** + **z**)]) ,! 4 (∀E: P33) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ ≤[**m**,(**m** + **z**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**m**,(**m** + **z**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**m**,(**m** + **z**)] & ≤[(**m** + **z**),**n**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[**m**,(**m** + **z**)] & ≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**])

,! 8 (∀E: P20; (**m** + **z**): C1.7,3) ¡

≤[**m**,(**m** + **z**)] & ≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀z (≤[(m + z),n] ⇒ ≤[m,n]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **41.** ¡

⊢ ∀n∀m∀z (≤[(m + z),n] ⇒ ≤[z,n]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m** + **z**),**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**)) ,! 4 (∀E: C2.5) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ⇒ (**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**m** + **z**) = (**z** + **m**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[(**z** + **m**),**n**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(≤[(**z** + **m**),**n**] ⇒ ≤[**z**,**n**]) ,! 8 (∀E: P40) ¡

≤[(**z** + **m**),**n**] ⇒ ≤[**z**,**n**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**z**,**n**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**z**,**n**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**m** + **z**),**n**] ⇒ ≤[**z**,**n**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀z (≤[(m + z),n] ⇒ ≤[z,n]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **42. Additive Cancellation Law of Inequality, Right Side.** ¡

⊢ ∀n∀m∀z (≤[(n + z),(m + z)] ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**z**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

ω[**m**] & ω[**z**] ,! 4 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**))
,! 5 (∀E: P15;
(**n** + **z**): C1.7,3;
(**m** + **z**): C1.7,4) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**)
,! 6 (()E: 5) ¡

∃k ((**n** + **z**) + k) = (**m** + **z**) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**) ,! 8 (∃E: 7) ¡

(((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**) ⇒ ((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**))
,! 9 (∀E: C2.20;
(**m** + **z**): C1.7,4) ¡

((**n** + **z**) + **a**) = (**m** + **z**) ⇒ ((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**)
,! 10 (()E: 9) ¡

((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[(**n** + **a**)] & ω[**z**] ,! 12 (𝕋E: C1.7,11) ¡

ω[(**n** + **a**)] ,! 13 (&E: 12) ¡

ω[**n**] & ω[**a**] ,! 14 (𝕋E: C1.7,13) ¡

(((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ⇒ (**n** + **a**) = **m**)
,! 15 (∀E: C2.60;
(**n** + **a**): C1.7,14) ¡

((**n** + **a**) + **z**) = (**m** + **z**) ⇒ (**n** + **a**) = **m**
,! 16 (()E: 15) ¡

(**n** + **a**) = **m** ,! 17 (⇒E: 11,16) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 18 (∃I: 17) ¡

(∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 19 (∀E: P17) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 20 (()E: 19) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀n∀m∀z (≤[(n + z),(m + z)] ⇒ ≤[n,m]) ! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **43. Additive Cancellation Law of Inequality, Left Side.** ¡

⊢ ∀n∀m∀z (≤[(z + n),(z + m)] ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m**,**z** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**z**] & ω[**n**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

ω[**z**] & ω[**m**] ,! 4 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**z**] & ω[**n**] ⇒ (**z** + **n**) = (**n** + **z**)) ,! 5 (∀E: C2.5) ¡

ω[**z**] & ω[**n**] ⇒ (**z** + **n**) = (**n** + **z**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**z** + **n**) = (**n** + **z**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[(**n** + **z**),(**z** + **m**)] ,! 8 (=E: 2,7) ¡

(ω[**z**] & ω[**m**] ⇒ (**z** + **m**) = (**m** + **z**)) ,! 9 (∀E: C2.5) ¡

ω[**z**] & ω[**m**] ⇒ (**z** + **m**) = (**m** + **z**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**z** + **m**) = (**m** + **z**) ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ,! 12 (=E: 8,11) ¡

(≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 13 (∀E: P42) ¡

≤[(**n** + **z**),(**m** + **z**)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 14 (()E: 13) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[(**z** + **n**),(**z** + **m**)] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀z (≤[(z + n),(z + m)] ⇒ ≤[n,m]) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **44.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[(n + m),n] ⇒ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**n** + **m**),**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 3) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n**) ,! 5 (∀E: C2.32) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**n** + 0) = **n** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[(**n** + **m**),(**n** + 0)] ,! 8 (Prem) ¡

(≤[(**n** + **m**),(**n** + 0)] ⇒ ≤[**m**,0]) ,! 9 (∀E: P43) ¡

≤[(**n** + **m**),(**n** + 0)] ⇒ ≤[**m**,0] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[**m**,0] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0) ,! 12 (∀E: P25) ¡

≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0 ,! 13 (()E: 12) ¡

m = 0 ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(**n** + **m**),**n**] ⇒ **m** = 0 ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(≤[(**n** + **m**),**n**] ⇒ **m** = 0) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m (≤[(n + m),n] ⇒ m = 0) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **45.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[(m + n),n] ⇒ m = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m** + **n**),**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**m**] & ω[**n**] ⇒ (**m** + **n**) = (**n** + **m**)) ,! 4 (∀E: C2.5) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] ⇒ (**m** + **n**) = (**n** + **m**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**m** + **n**) = (**n** + **m**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[(**n** + **m**),**n**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(≤[(**n** + **m**),**n**] ⇒ **m** = 0) ,! 8 (∀E: P44) ¡

≤[(**n** + **m**),**n**] ⇒ **m** = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

m = 0 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(**m** + **n**),**n**] ⇒ **m** = 0 ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**m** + **n**),**n**] ⇒ **m** = 0) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (≤[(m + n),n] ⇒ m = 0)   ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P46 through P51 are inequalities with specific numbers. All except P50 rely on P22 and P23; it appeals to P37. ¡

! **46.** ¡

⊢ ≤[0,0] ¡

(ω[0] ⇒ ≤[0,0])   ,! 1 (∀E: P24) ¡

ω[0] ⇒ ≤[0,0]   ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[0,0]   ! 3 (⇒E: ω0,2) ¡

▯

! **47.** ¡

⊢ ≤[0,1] ¡

(ω[1] ⇒ ≤[0,1])   ,! 1 (∀E: P24) ¡

ω[1] ⇒ ≤[0,1]   ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[0,1]   ! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

▯

! **48.** ¡

⊢ ≤[0,2] ¡

(ω[2] ⇒ ≤[0,2])   ,! 1 (∀E: P24) ¡

ω[2] ⇒ ≤[0,2]   ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[0,2]   ! 3 (⇒E: IV9.11) ¡

▯

! **49.** ¡

⊢ ≤[1,1] ¡

(ω[1] ⇒ ≤[1,1])   ,! 1 (∀E: P23) ¡

ω[1] ⇒ ≤[1,1]   ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[1,1]   ! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

▯

! **50.** ¡

⊢ ≤[1,2] ¡

(ω[1] ⇒ ≤[1,(1 + 1)]) ,! 1 (∀E: P37) ¡

ω[1] ⇒ ≤[1,(1 + 1)] ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[1,(1 + 1)] ,! 3 (⇒E: IV9.2,2) ¡

≤[1,2] ,! 4 (=E: C2.69,3) ¡

▯

! **51.** ¡

⊢ ≤[2,2] ¡

(ω[2] ⇒ ≤[2,2]) ,! 1 (∀E: P23) ¡

ω[2] ⇒ ≤[2,2] ,! 2 (()E: 1) ¡

≤[2,2] ! 3 (⇒E: IV9.11,2) ¡

▯

! Inequality involving a successor are the theme from P52 through P56, which in turns provide the basis from solving the inequalities P57 through P63. ¡

! **52.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] & ¬ n = m ⇒ ≤[(n+1),m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m** ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = **m** ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m**) ,! 5 (∀E: P15) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ∃k (**n** + k) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 7 (()E: 3,6) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 8 (∃E: 7) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 9 (𝕋E: C1.7,8) ¡

ω[**n**] ,! 10 (&E: 9) ¡

ω[**k**] ,! 11 (&E: 9) ¡

k = 0 ,! 12 (Prem) ¡

(**n** + 0) = **m** ,! 13 (=E: 8,12) ¡

((**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m**) ,! 14 (∀E: C2.34) ¡

(**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m** ,! 15 (()E: 14) ¡

n = **m** ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

𝔉 ,! 17 (𝔉I: 4,16) ¡

k = 0 ⇒ 𝔉 ,! 18 (⇒I: 12,17) ¡

¬ **k** = 0 ,! 19 (¬I: 18) ¡

ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ,! 20 (&I: 11,19) ¡

(ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ∃m (m + 1) = **k**) ,! 21 (∀E: C2.49) ¡

ω[**k**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ∃m (m + 1) = **k** ,! 22 (()E: 21) ¡

∃m (m + 1) = **k** ,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

(**j** + 1) = **k** ,! 24 (∃E: 23) ¡

(**n** + (**j** + 1)) = **m** ,! 25 (=E: 8,24) ¡

((**n** + (**j** + 1)) = **m** ⇒ (**n** + (1 + **j**)) = **m**)
,! 26 (∀E: C2.12) ¡

(**n** + (**j** + 1)) = **m** ⇒ (**n** + (1 + **j**)) = **m**
,! 27 (()E: 26) ¡

(**n** + (1 + **j**)) = **m** ,! 28 (⇒E: 25,27) ¡

((**n** + (1 + **j**)) = **m** ⇒ ((**n** + 1) + **j**) = **m**)
,! 29 (∀E: C2.15) ¡

(**n** + (1 + **j**)) = **m** ⇒ ((**n** + 1) + **j**) = **m**
,! 30 (()E: 29) ¡

((**n** + 1) + **j**) = **m** ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

∃k ((**n** + 1) + k) = **m** ,! 32 (∃I: 31) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 33 (&I: IV9.2,10)
¡

(∃k ((**n** + 1) + k) = **m** ⇒ ≤[(**n** + 1),**m**])
,! 34 (∀E: P17;
(**n** + 1): C1.7,33) ¡

∃k ((**n** + 1) + k) = **m** ⇒ ≤[(**n** + 1),**m**] ,! 35 (()E: 34) ¡

≤[(**n** + 1),**m**] ,! 36 (⇒E: 32,35) ¡

≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m** ⇒ ≤[(**n** + 1),**m**] ,! 37 (⇒I: 2,36) ¡

(≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = **m** ⇒ ≤[(**n** + 1),**m**]) ,! 38 (()I: 37) ¡

∀n∀m (≤[n,m] & ¬ n = m ⇒ ≤[(n+1),m]) ! 39 (∀I: 1,38) ¡

□

! **53.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,(m + 1)] & ¬ n = (m + 1) ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ω[1] ,! 4 (𝕀E: C1.7,3) ¡

(≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[(**n** + 1),(**m** + 1)])
,! 5 (∀E: P52;
(**m** + 1): C1.7,4) ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[(**n** + 1),(**m** + 1)]
,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(**n** + 1),(**m** + 1)] ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(≤[(**n** + 1),(**m** + 1)] ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 8 (∀E: P42) ¡

≤[(**n** + 1),(**m** + 1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (≤[n,(m + 1)] & ¬ n = (m + 1) ⇒ ≤[n,m])
! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **54.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**m**] & ω[1] ,! 3 (𝕀E: C1.7,2) ¡

(**n** = (**m** + 1) ∨ ¬ **n** = (**m** + 1)) ,! 4 (∀E: I3.4;

(**m** + 1): C1.7,3)   ¡

n = (**m** + 1) ∨ ¬ **n** = (**m** + 1)   ,! 5 (()E: 4)   ¡

n = (**m** + 1)   ,! 6 (Prem)   ¡

≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1)   ,! 7 (∨I: 6)   ¡

n = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1)   ,! 8 (⇒I: 6,7)   ¡

¬ **n** = (**m** + 1)   ,! 9 (Prem)   ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1)   ,! 10 (&I: 2,9)   ¡

(≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 11 (∀E: P53)   ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] & ¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**]
,! 12 (()E: 11)   ¡

≤[**n**,**m**]   ,! 13 (⇒E: 10,12)   ¡

≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1)   ,! 14 (∨I: 13)   ¡

¬ **n** = (**m** + 1) ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1) ,! 15 (⇒I: 9,14)   ¡

≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1)   ,! 16 (∨E: 5,8,15)   ¡

≤[**n**,(**m** + 1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1)   ,! 17 (⇒I: 2,16)   ¡

(≤[**n**,(**m** + 1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m** + 1))
,! 18 (()I: 17)   ¡

∀n∀m (≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1))
! 19 (∀I: 1,18)   ¡

□

! **55.**   ¡

⊦ ∀n∀m∀x (ω[m] & σ[m,x] & ≤[n,x] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = x)   ¡

n,**m**,**x**   ,! 1 (Prem)   ¡

ω[**m**] & σ[**m**,**x**] & ≤[**n**,**x**]   ,! 2 (Prem)   ¡

ω[**m**] & σ[**m**,**x**]   ,! 3 (&E: 2)   ¡

≤[**n**,**x**]   ,! 4 (&E: 2)   ¡

(ω[**m**] & σ[**m**,**x**] ⇒ **x** = (**m** + 1))   ,! 5 (∀E: C2.48)   ¡

ω[**m**] & σ[**m**,**x**] ⇒ **x** = (**m** + 1)   ,! 6 (()E: 5)   ¡

x = (**m** + 1)   ,! 7 (⇒E: 3,6)   ¡

≤[n,(m + 1)] ,! 8 (=E: 4,7) ¡

(≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1))
,! 9 (∀E: P54) ¡

≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1) ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[n,m] ∨ n = (m + 1) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[n,m] ∨ n = x ,! 12 (=E: 7,11) ¡

ω[m] & σ[m,x] & ≤[n,x] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = x
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(ω[m] & σ[m,x] & ≤[n,x] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = x)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀x (ω[m] & σ[m,x] & ≤[n,x] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = x)
! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **56.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[m,n] & ≤[n,(m + 1)] ⇒ n = m ∨ n = (m + 1)) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

≤[m,n] & ≤[n,(m + 1)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,(m + 1)] ,! 3 (&E: 2) ¡

(≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1))
,! 4 (∀E: P54) ¡

≤[n,(m + 1)] ⇒ ≤[n,m] ∨ n = (m + 1) ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[n,m] ∨ n = (m + 1) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[n,m] ,! 7 (Prem) ¡

≤[m,n] ,! 8 (&E: 2) ¡

≤[n,m] & ≤[m,n] ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m) ,! 10 (∀E: P22) ¡

≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m ,! 11 (()E: 10) ¡

n = m ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

n = m ∨ n = (m + 1) ,! 13 (∨I: 12) ¡

≤[n,m] ⇒ n = m ∨ n = (m + 1) ,! 14 (⇒I: 7,13) ¡

n = (m + 1) ,! 15 (Prem) ¡

n = **m** ∨ **n** = (**m** + 1) ,! 16 (∨I: 15) ¡

n = (**m** + 1) ⇒ **n** = **m** ∨ **n** = (**m** + 1) ,! 17 (⇒I: 15,16) ¡

n = **m** ∨ **n** = (**m** + 1) ,! 18 (∨E: 6,14,17) ¡

≤[**m**,**n**] & ≤[**n**,(**m** + 1)] ⇒ **n** = **m** ∨ **n** = (**m** + 1)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[**m**,**n**] & ≤[**n**,(**m** + 1)] ⇒ **n** = **m** ∨ **n** = (**m** + 1))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m (≤[m,n] & ≤[n,(m + 1)] ⇒ n = m ∨ n = (m + 1))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **57.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[(m + 1),n] & ≤[n,(m + 2)]
⇒ n = (m + 1) ∨ n = (m + 2)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m** + 1),**n**] & ≤[**n**,(**m** + 2)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[(**m** + 1),**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ω[1] ,! 4 (𝕋E: C1.7,3) ¡

(≤[(**m** + 1),**n**] & ≤[**n**,((**m** + 1) + 1)]
⇒ **n** = (**m** + 1) ∨ **n** = ((**m** + 1) + 1))
,! 5 (∀E: P56;
(**m** + 1): C1.7,4) ¡

≤[(**m** + 1),**n**] & ≤[**n**,((**m** + 1) + 1)]
⇒ **n** = (**m** + 1) ∨ **n** = ((**m** + 1) + 1)
,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**m**] & ω[1] & ω[1] ,! 7 (&I: IV9.2,4) ¡

(ω[**m**] & ω[1] & ω[1] ⇒ (**m** + (1 + 1)) = ((**m** + 1) + 1))
,! 8 (∀E: C2.14) ¡

ω[**m**] & ω[1] & ω[1] ⇒ (**m** + (1 + 1)) = ((**m** + 1) + 1)
,! 9 (()E: 8) ¡

(**m** + (1 + 1)) = ((**m** + 1) + 1) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**m** + 2) = ((**m** + 1) + 1) ,! 11 (=E: C2.69,10)
¡

≤[(**m** + 1),**n**] & ≤[**n**,(**m** + 2)] ⇒ **n** = (**m** + 1) ∨ **n** = (**m** + 2)
,! 12 (=E: 6,11) ¡

n = (m + 1) ∨ n = (m + 2) ,! 13 (⇒E: 2,12) ¡

≤[(m + 1),n] & ≤[n,(m + 2)] ⇒ n = (m + 1) ∨ n = (m + 2)
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(≤[(m + 1),n] & ≤[n,(m + 2)] ⇒ n = (m + 1) ∨ n = (m + 2))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m (≤[(m + 1),n] & ≤[n,(m + 2)] ⇒ n = (m + 1) ∨ n = (m + 2))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **58.** ¡

⊢ ∀n (≤[n,1] ⇒ n = 0 ∨ n = 1) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,1] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,1] ⇒ ω[n]) ,! 3 (∀E: P6) ¡

≤[n,1] ⇒ ω[n] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[n] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[n] ⇒ ≤[0,n]) ,! 6 (∀E: P24) ¡

ω[n] ⇒ ≤[0,n] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[0,n] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[0,n] & ≤[n,1] ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(≤[0,n] & ≤[n,(0 + 1)] ⇒ n = 0 ∨ n = (0 + 1))
,! 10 (∀E: P56) ¡

≤[0,n] & ≤[n,(0 + 1)] ⇒ n = 0 ∨ n = (0 + 1)
,! 11 (()E: 10) ¡

≤[0,n] & ≤[n,1] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ,! 12 (=E: C2.67,11)
¡

n = 0 ∨ n = 1 ,! 13 (⇒E: 9,12) ¡

≤[n,1] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(≤[n,1] ⇒ n = 0 ∨ n = 1) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀n (≤[n,1] ⇒ n = 0 ∨ n = 1) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **59.** ¡

⊢ ∀n (≤[n,2] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ∨ n = 2) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,2] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,(1 + 1)] ,! 3 (=E: C2.69,2) ¡

(≤[**n**,(1 + 1)] ⇒ ≤[**n**,1] ∨ **n** = (1 + 1))
,! 4 (∀E: P54) ¡

≤[**n**,(1 + 1)] ⇒ ≤[**n**,1] ∨ **n** = (1 + 1) ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,1] ∨ **n** = (1 + 1) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,1] ,! 7 (Prem) ¡

(≤[**n**,1] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1) ,! 8 (∀E: P58) ¡

≤[**n**,1] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ,! 9 (()E: 8) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 11 (∨I: 10) ¡

≤[**n**,1] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 12 (⇒I: 7,11) ¡

n = (1 + 1) ,! 13 (Prem) ¡

n = 2 ,! 14 (=E: C2.69,13)
¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 15 (∨I: 14) ¡

n = (1 + 1) ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 16 (⇒I: 13,15) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 17 (∨E: 6,12,16) ¡

≤[**n**,2] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(≤[**n**,2] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀n (≤[n,2] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ∨ n = 2) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **60.** ¡

⊢ ∀n (≤[n,3] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ∨ n = 2 ∨ n = 3) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,3] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,(2 + 1)] ,! 3 (=E: C2.70,2) ¡

(≤[**n**,(2 + 1)] ⇒ ≤[**n**,2] ∨ **n** = (2 + 1))

,! 4 (∀E: P54) ¡

≤[**n**,(2 + 1)] ⇒ ≤[**n**,2] ∨ **n** = (2 + 1) ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,2] ∨ **n** = (2 + 1) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,2] ,! 7 (Prem) ¡

(≤[**n**,2] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2) ,! 8 (∀E: P59) ¡

≤[**n**,2] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 9 (()E: 8) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 11 (∨I: 10) ¡

≤[**n**,2] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3
,! 12 (⇒I: 7,11) ¡

n = (2 + 1) ,! 13 (Prem) ¡

n = 3 ,! 14 (=E: C2.70,13)
¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 15 (∨I: 14) ¡

n = (2 + 1) ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3
,! 16 (⇒I: 13,15) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 17 (∨E: 6,12,16) ¡

≤[**n**,3] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(≤[**n**,3] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3)
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n (≤[n,3] ⇒ n = 0 ∨ n = 1 ∨ n = 2 ∨ n = 3)
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **61.** ¡

⊢ ∀n (≤[1,n] & ≤[n,2] ⇒ n = 1 ∨ n = 2) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,2] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[1,**n**] & ≤[**n**,(1 + 1)] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = (1 + 1))
,! 3 (∀E: P56) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,(1 + 1)] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = (1 + 1)
,! 4 (()E: 3) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,2] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 5 (=E: C2.69) ¡

n = 1 ∨ **n** = 2 ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,2] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[1,**n**] & ≤[**n**,2] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n (≤[1,n] & ≤[n,2] ⇒ n = 1 ∨ n = 2) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **62.** ¡

⊦ ∀n (≤[1,n] & ≤[n,3] ⇒ n = 1 ∨ n = 2 ∨ n = 3) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,3] ,! 2 (Prem) ¡

≤[1,**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**n**,3] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[1,**n**] ⇒ ¬ **n** = 0) ,! 5 (∀E: P27) ¡

≤[1,**n**] ⇒ ¬ **n** = 0 ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ **n** = 0 ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[**n**,3] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3)
,! 8 (∀E: P60) ¡

≤[**n**,3] ⇒ **n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3
,! 9 (()E: 8) ¡

n = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3) ,! 11 (()I: 10) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3) & ¬ **n** = 0
,! 12 (&I: 7,11) ¡

((**n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3) & ¬ **n** = 0
⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3)
,! 13 (∀E: I3.10) ¡

(**n** = 0 ∨ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3) & ¬ **n** = 0
⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3
,! 14 (()E: 13) ¡

n = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3 ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

≤[1,**n**] & ≤[**n**,3] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[1,**n**] & ≤[**n**,3] ⇒ **n** = 1 ∨ **n** = 2 ∨ **n** = 3)
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n (≤[1,n] & ≤[n,3] ⇒ n = 1 ∨ n = 2 ∨ n = 3)
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **63.** ¡

⊢ ∀n (≤[1,n] & ¬ n = 1 ⇒ ≤[2,n]) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

≤[1,**n**] & ¬ **n** = 1 ,! 2 (Prem) ¡

≤[1,**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 1 ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 1 ⇒ ¬ 1 = **n**) ,! 5 (∀E: I3.3) ¡

¬ **n** = 1 ⇒ ¬ 1 = **n** ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ 1 = **n** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[1,**n**] & ¬ 1 = **n** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(≤[1,**n**] & ¬ 1 = **n** ⇒ ≤[(1+1),**n**]) ,! 9 (∀E: P52) ¡

≤[1,**n**] & ¬ 1 = **n** ⇒ ≤[(1+1),**n**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(1+1),**n**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[2,**n**] ,! 12 (=E: C2.69,11)
¡

≤[1,**n**] & ¬ **n** = 1 ⇒ ≤[2,**n**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[1,**n**] & ¬ **n** = 1 ⇒ ≤[2,**n**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n (≤[1,n] & ¬ n = 1 ⇒ ≤[2,n]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **64. Dichotomy of Inequality.** P64 has an alternative proof, which appeals to Induction and relies on the Fundamental Laws of Inequality. ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**]
⇒ ∃P∃Q (ℿ[**n**,P] & ℿ[**m**,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P)))

,! 3 (∀E IV7.21) ¡

ω[n] & ω[m]
⇒ ∃P∃Q (𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 4 (()E: 3) ¡

∃P∃Q (𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃Q (𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 6 (∃E: 5) ¡

(𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P))
,! 7 (∃E: 6) ¡

𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & (P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P) ,! 8 (()E: 7) ¡

𝔑[n,P] ,! 9 (&E: 8) ¡

𝔑[m,Q] ,! 10 (&E: 8) ¡

(P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P) ,! 11 (&E: 8) ¡

P ⊆ Q ∨ Q ⊆ P ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] ,! 13 (&I: 2,9) ¡

P ⊆ Q ,! 14 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] ,! 15 (&I: 10,13) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & P ⊆ Q
,! 16 (&I: 14,15) ¡

(ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & P ⊆ Q ⇒ ≤[n,m])
,! 17 (∀E: P9) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[n,P] & 𝔑[m,Q] & P ⊆ Q ⇒ ≤[n,m]
,! 18 (()E: 17) ¡

≤[n,m] ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 20 (∨I: 19) ¡

P ⊆ Q ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n] ,! 21 (⇒I: 14,20) ¡

Q ⊆ P ,! 22 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[m,Q] & 𝔑[n,P] ,! 23 (&I: 10,13) ¡

ω[n] & ω[m] & 𝔑[m,Q] & 𝔑[n,P] & Q ⊆ P
,! 24 (&I: 22,23) ¡

(ω[n] & ω[m] & 𝔑[m,Q] & 𝔑[n,P] & Q ⊆ P ⇒ ≤[m,n])

,! 25 (∀E: P9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ℔[**m**,**Q**] & ℔[**n**,**P**] & **Q** ⊆ **P** ⇒ ≤[**m**,**n**]
,! 26 (()E: 25) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[**m**,**n**] ,! 28 (∨I: 27) ¡

Q ⊆ **P** ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[**m**,**n**] ,! 29 (⇒I: 22,28) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[**m**,**n**] ,! 30 (∨E: 12,21,29) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[**m**,**n**] ,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[**m**,**n**]) ,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[m,n]) ! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! **65.** Importantly, dichotomy can be tightened. ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[(m+1),n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ω[1] ,! 5 (&I: IV9.2,4) ¡

(ω[**m**] & ω[1] ⇒ ω[(**m**+1)]) ,! 6 (∀E: C1.8) ¡

ω[**m**] & ω[1] ⇒ ω[(**m**+1)] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[(**m**+1)] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[(**m**+1)] & ω[**n**] ,! 9 (&I: 3,8) ¡

(ω[(**m**+1)] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ∨ ≤[**n**,(**m**+1)])
,! 10 (∀E: P64; (**m**+1): C1.7,5) ¡

ω[(**m**+1)] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ∨ ≤[**n**,(**m**+1)]
,! 11 (()E: 10) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ∨ ≤[**n**,(**m**+1)] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 13 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 14 (∨I: 13) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 15 (⇒I: 13,14) ¡

≤[**n**,(**m**+1)] ,! 16 (Prem) ¡

(≤[**n**,(**m**+1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m**+1))
,! 17 (∀E: P54) ¡

≤[**n**,(**m**+1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m**+1) ,! 18 (()E: 17) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ **n** = (**m**+1) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 20 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 21 (∨I: 20) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 22 (⇒I: 20,21) ¡

n = (**m**+1) ,! 23 (Prem) ¡

≤[**n**,**n**] ,! 24 (=E: 16,23) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 25 (=E: 23,24) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 26 (∨I: 25) ¡

n = (**m**+1) ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 27 (⇒I: 23,26) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 28 (∨E: 19,22,27)
¡

≤[**n**,(**m**+1)] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 29 (⇒I: 16,28) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 30 (∨I: 12,15,29)
¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**]) ,! 32 (()I: 31) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ≤[n,m] ∨ ≤[(m+1),n])
! 33 (∀I: 1,32) ¡

▯

! P66 through P70 are corollaries of P65. ¡

! **66.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (m = (n + 1) & ω[k] ⇒ ≤[k,n] ∨ ≤[m,k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**n** + 1) & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

m = (**n** + 1) ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[1] ,! 5 (𝕋E: C1.7,3) ¡

ω[**n**] ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 7 (&I: 4,6) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ≤[**k**,**n**] ∨ ≤[(**n** + 1),**k**]) ,! 8 (∀E: P65) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ≤[**k**,**n**] ∨ ≤[(**n** + 1),**k**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**k**,**n**] ∨ ≤[(**n** + 1),**k**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[**k**,**n**] ∨ ≤[**m**,**k**] ,! 11 (=E: 3,10) ¡

m = (**n** + 1) & ω[**k**] ⇒ ≤[**k**,**n**] ∨ ≤[**m**,**k**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**m** = (**n** + 1) & ω[**k**] ⇒ ≤[**k**,**n**] ∨ ≤[**m**,**k**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (m = (n + 1) & ω[k] ⇒ ≤[k,n] ∨ ≤[m,k]) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **67.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[n,m] ⇒ ≤[(m+1),n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ ≤[**n**,**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**]) ,! 5 (∀E: P65) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**n**,**m**] ∨ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 8 (Prem) ¡

¬ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 9 (Prem) ¡

ℱ ,! 10 (ℱI: 4,8) ¡

¬ ≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ℱ ,! 11 (⇒I: 9,10) ¡

¬¬ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 13 (¬E: 12) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 14 (⇒I: 8,13) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 15 (Prem) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 16 (⇒I: 15,15) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 17 (∨E: 7,14,16) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**])
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[n,m] ⇒ ≤[(m+1),n])
! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **68.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[n,m] ⇒ ≤[m,n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**])
,! 3 (∀E: P67) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**]) ,! 6 (∀E: P40) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[**m**,**n**] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[**m**,**n**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[**m**,**n**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[**m**,**n**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[n,m] ⇒ ≤[m,n]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **69.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[(m+1),n] ⇒ ≤[n,m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ ≤[(**m**+1),**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ ≤[**n**,**m**] ,! 5 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**])
,! 7 (∀E: P67) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**+1),**n**]
,! 8 (()E: 7) ¡

≤[(**m**+1),**n**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

𝔉 ,! 10 (𝔉I: 4,9) ¡

¬ ≤[**n**,**m**] ⇒ 𝔉 ,! 11 (⇒I: 5,10) ¡

¬¬ ≤[**n**,**m**] ,! 12 (¬I: 11) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 13 (¬E: 12) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ ≤[(**m**+1),**n**] ⇒ ≤[**n**,**m**])
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ ≤[(m+1),n] ⇒ ≤[n,m])
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **70.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ n = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ¬ ≤[(**n**+1),**m**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ ≤[(**n**+1),**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 5 (∀E: P5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (&E: 7) ¡

ω[**m**] ,! 9 (&E: 7) ¡

ω[m] & ω[n] ,! 10 (&I: 8,9) ¡

ω[m] & ω[n] & ¬ ≤[(n+1),m] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

(ω[m] & ω[n] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ ≤[m,n])
,! 12 (∀E: P69) ¡

ω[m] & ω[n] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ ≤[m,n] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[m,n] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[n,m] & ≤[m,n] ,! 15 (&I: 3,14) ¡

(≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m) ,! 16 (∀E: P22) ¡

≤[n,m] & ≤[m,n] ⇒ n = m ,! 17 (()E: 16) ¡

n = m ,! 18 (⇒E: 17) ¡

≤[n,m] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ n = m ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[n,m] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ n = m) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m (≤[n,m] & ¬ ≤[(n+1),m] ⇒ n = m) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **71.** P71 reformulates C2.64 in the terms of inequality. ¡

⊢ ∀P∀a (ω[a] & P[a] & ∀n (≤[a,n] & P[n] ⇒ P[(n+1)])
⇒ ∀n (≤[a,n] ⇒ P[n])) ¡

P,**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[a] & P[a] & ∀n (≤[a,n] & P[n] ⇒ P[(n+1)])
,! 2 (Prem) ¡

ω[a] & P[a] ,! 3 (&E: 2) ¡

∀n (≤[a,n] & P[n] ⇒ P[(n+1)]) ,! 4 (&E: 2) ¡

n ,! 5 (Prem) ¡

P[(a+n)] ,! 6 (Prem) ¡

ω[a] & ω[n] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

(ω[a] & ω[n] ⇒ ≤[a,(a + n)]) ,! 8 (∀E: P33) ¡

ω[a] & ω[n] ⇒ ≤[a,(a + n)] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[a,(a+n)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[a,(a+n)] & P[(a+n)] ,! 11 (&I: 6,10) ¡

(≤[a,(a+n)] & P[(a+n)] ⇒ P[((a+n)+1)])
,! 12 (∀E: 4;
(a+n): C1.7,7) ¡

≤[a,(a+n)] & P[(a+n)] ⇒ P[((a+n)+1)]
,! 13 (()E: 12) ¡

P[((a+n)+1)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[a] & ω[n] & ω[1] ,! 15 (&I: IV9.2,7) ¡

(ω[a] & ω[n] & ω[1] ⇒ (a + (n + 1)) = ((a + n) + 1))
,! 16 (∀E: C2.14) ¡

ω[a] & ω[n] & ω[1] ⇒ (a + (n + 1)) = ((a + n) + 1)
,! 17 (()E: 16) ¡

(a + (n + 1)) = ((a + n) + 1) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

P[(a+(n+1))] ,! 19 (=E: 14,18) ¡

P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))] ,! 20 (⇒I: 6,19) ¡

(P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))]) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀n (P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))]) ,! 22 (∀I: 5,21) ¡

ω[a] & P[a] & ∀n (P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))])
,! 23 (&I: 3,22) ¡

(ω[a] & P[a] & ∀n (P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))])
⇒ ∀n (ω[n] ⇒ P[(a+n)]))
,! 24 (∀E: C2.64) ¡

ω[a] & P[a] & ∀n (P[(a+n)] ⇒ P[(a+(n+1))])
⇒ ∀n (ω[n] ⇒ P[(a+n)])
,! 25 (()E: 24) ¡

∀n (ω[n] ⇒ P[(a+n)]) ,! 26 (⇒E: 23,25) ¡

n ,! 27 (Prem) ¡

≤[a,n] ,! 28 (Prem) ¡

(≤[a,n] ⇒ ∃k (a + k) = n) ,! 29 (∀E: P15) ¡

≤[a,n] ⇒ ∃k (a + k) = n ,! 30 (()E: 29) ¡

∃k (a + k) = n ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

(a + k) = n ,! 32 (∃E: 31) ¡

ω[a] & ω[k] ,! 33 (𝕋E: C1.7,32) ¡

ω[k] ,! 34 (&E: 33) ¡

(ω[**k**] ⇒ **P**[(**a**+**k**)]) ,! 35 (∀E: 26) ¡

ω[**k**] ⇒ **P**[(**a**+**k**)] ,! 36 (()E: 35) ¡

P[(**a**+**k**)] ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

P[**n**] ,! 38 (=E: 32,37) ¡

≤[**a**,**n**] ⇒ **P**[**n**] ,! 39 (⇒I: 28,38) ¡

(≤[**a**,**n**] ⇒ **P**[**n**]) ,! 40 (()I: 39) ¡

∀n (≤[**a**,n] ⇒ **P**[n]) ,! 41 (∀I: 27,40) ¡

ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀n (≤[**a**,n] & **P**[n] ⇒ **P**[(n+1)])
⇒ ∀n (≤[**a**,n] ⇒ **P**[n])
,! 42 (⇒I: 2,41) ¡

(ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀n (≤[**a**,n] & **P**[n] ⇒ **P**[(n+1)])
⇒ ∀n (≤[**a**,n] ⇒ **P**[n]))
,! 43 (()I: 42) ¡

∀P∀a (ω[a] & P[a] & ∀n (≤[a,n] & P[n] ⇒ P[(n+1)])
⇒ ∀n (≤[a,n] ⇒ P[n]))
! 44 (∀I: 1,43) ¡

□

! **72.** Lemma for The Well-Ordering Principle (P73). ¡

⊢ ∀n (ω[n]
⇒ ∀P (∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))))
¡

! We use induction, taking ϕ to be
∀P (∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
It must be shown that
∀P (∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
and
∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P (∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x]
& ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
⇒ ∀P (∀x (≤[x,m] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,m] & P[x]
& ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))) ¡

! To prove:

∀P (∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

(**P**[0] ∨ ¬ **P**[0]) ,! 2 (∀E: I3.15) ¡

P[0] ∨ ¬ **P**[0] ,! 3 (()E: 2) ¡

P[0] ,! 4 (Prem) ¡

≤[0,0] & **P**[0] ,! 5 (&I: P46,4) ¡

y ,! 6 (Prem) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 7 (Prem) ¡

ω[**y**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[**y**] ⇒ ≤[0,**y**]) ,! 9 (∀E: P24) ¡

ω[**y**] ⇒ ≤[0,**y**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[0,**y**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[0,**y**] ,! 12 (⇒I: 7,11) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[0,**y**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y]) ,! 14 (∀I: 6,13) ¡

≤[0,0] & **P**[0] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y])
,! 15 (&I: 5,14) ¡

(≤[0,0] & **P**[0] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y]))
,! 16 (()I: 15) ¡

∃x (≤[x,0] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 17 (∃I: 16) ¡

∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,0] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 18 (∨I: 17) ¡

P[0]
⇒ ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,0] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 19 (⇒I: 4,18) ¡

¬ **P**[0] ,! 20 (Prem) ¡

x ,! 21 (Prem) ¡

≤[**x**,0] ,! 22 (Prem) ¡

```
        ( ≤[x,0] ⇒ x = 0 )                     ,! 23 (∀E: P25)       ¡

        ≤[x,0] ⇒ x = 0                         ,! 24 (()E: 23)       ¡

        x = 0                                  ,! 25 (⇒E: 22,24)     ¡

        ¬ P[x]                                 ,! 26 (=E: 20,25)     ¡

      ≤[x,0] ⇒ ¬ P[x]                          ,! 27 (⇒I: 22,26)     ¡

      (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])                        ,! 28 (()I: 27)       ¡

    ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])                       ,! 29 (∀I: 21,28)     ¡

    ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
    ∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))
                                               ,! 30 (∨I: 29)        ¡

  ¬ P[0]
  ⇒ ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
     ∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))
                                               ,! 31 (⇒I: 20,30)     ¡

  ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
  ∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))
                                               ,! 32 (∨E: 3,19,31) ¡

  ( ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
    ∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) )
                                               ,! 33 (()I: 32)       ¡

∀P ( ∀x (≤[x,0] ⇒ ¬ P[x])
     ∨ ∃x (≤[x,0] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) )
                                               ,! 34 (∀I: 1,33)      ¡

! To prove:
    ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
           & ∀P ( ∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
                  ∨ ∃x (≤[x,n] & P[x]
                        & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) )
          ⇒ ∀P ( ∀x (≤[x,m] ⇒ ¬ P[x])
                  ∨ ∃x (≤[x,m] & P[x]
                        & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) ) )      ¡

  n,m                                          ,! 35 (Prem)          ¡

    ω[n] & σ[n,m]
    & ∀P ( ∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
           ∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) )
                                               ,! 36 (Prem)          ¡

    ω[n] & σ[n,m]                              ,! 37 (&E: 36)        ¡
```

ω[n] ,! 38 (&E: 36) ¡

∀P (∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 39 (&E: 36) ¡

(ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n + 1) = m) ,! 40 (∀E: C2.47) ¡

ω[n] & σ[n,m] ⇒ (n + 1) = m ,! 41 (()E: 40) ¡

(n + 1) = m ,! 42 (⇒E: 37,41) ¡

((n + 1) = m ⇒ ω[m]) ,! 43 (∀E: C1.10) ¡

(n + 1) = m ⇒ ω[m] ,! 44 (()E: 43) ¡

ω[m] ,! 45 (⇒E: 42,44) ¡

P ,! 46 (Prem) ¡

(∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 47 (∀E: 39) ¡

∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 48 (()E: 47) ¡

! Case 1. ¡

∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x]) ,! 49 (Prem) ¡

(P[m] ∨ ¬ P[m]) ,! 50 (∀E: I3.15) ¡

P[m] ∨ ¬ P[m] ,! 51 (()E: 50) ¡

! Case 1a. ¡

P[m] ,! 52 (Prem) ¡

! To show: ∃x (≤[x,m] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])) ¡

(ω[m] ⇒ ≤[m,m]) ,! 53 (∀E: P23) ¡

ω[m] ⇒ ≤[m,m] ,! 54 (()E: 53) ¡

≤[m,m] ,! 55 (⇒E: 45,54) ¡

≤[m,m] & P[m] ,! 56 (&I: 52,55) ¡

y ,! 57 (Prem) ¡

ω[y] & P[y] ,! 58 (Prem) ¡

ω[**y**] ,! 59 (&E: 58) ¡

P[**y**] ,! 60 (&E: 58) ¡

ω[**y**] & ω[**n**] ,! 61 (&I: 38,59) ¡

≤[**y**,**n**] ,! 62 (Prem) ¡

(≤[**y**,**n**] ⇒ ¬ **P**[**y**]) ,! 63 (∀E: 49) ¡

≤[**y**,**n**] ⇒ ¬ **P**[**y**] ,! 64 (()E: 63) ¡

¬ **P**[**y**] ,! 65 (⇒E: 62,64) ¡

ℑ ,! 66 (ℑI: 60,65) ¡

≤[**y**,**n**] ⇒ ℑ ,! 67 (⇒I: 62,66) ¡

¬ ≤[**y**,**n**] ,! 68 (¬I: 67) ¡

ω[**y**] & ω[**n**] & ¬ ≤[**y**,**n**] ,! 69 (&I: 61,68) ¡

(ω[**y**] & ω[**n**] & ¬ ≤[**y**,**n**] ⇒ ≤[(**n**+1),**y**])
,! 70 (∀E: P67) ¡

ω[**y**] & ω[**n**] & ¬ ≤[**y**,**n**] ⇒ ≤[(**n**+1),**y**]
,! 71 (()E: 70) ¡

≤[(**n**+1),**y**] ,! 72 (⇒E: 69,71) ¡

≤[**m**,**y**] ,! 73 (=E: 42,72) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**m**,**y**] ,! 74 (⇒I: 58,73) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**m**,**y**]) ,! 75 (()I: 74) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**m**,y]) ,! 76 (∀I: 57,75) ¡

≤[**m**,**m**] & **P**[**m**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**m**,y])
,! 77 (&I: 56,76) ¡

(≤[**m**,**m**] & **P**[**m**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**m**,y]))
,! 78 (()I: 77) ¡

∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 79 (∃I: 78) ¡

∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 80 (∨I: 79) ¡

P[m]
⇒ ∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))

,! 81 (⇒I: 52,80) ¡

! Case 1b. ¡

¬ **P**[**m**] ,! 82 (Prem) ¡

! To show: ∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x]) ¡

x ,! 83 (Prem) ¡

≤[**x**,**m**] ,! 84 (Prem) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ≤[**x**,**m**] ,! 85 (&I: 37,84) ¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ≤[**x**,**m**] ⇒ ≤[**x**,**n**] ∨ **x** = **m**)
,! 86 (∀E: P55) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**] & ≤[**x**,**m**] ⇒ ≤[**x**,**n**] ∨ **x** = **m**
,! 87 (()E: 86) ¡

≤[**x**,**n**] ∨ **x** = **m** ,! 88 (⇒E: 85,87) ¡

≤[**x**,**n**] ,! 89 (Prem) ¡

(≤[**x**,**n**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 90 (∀E: 49) ¡

≤[**x**,**n**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 91 (()E: 90) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 92 (⇒E: 89,91) ¡

≤[**x**,**n**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 93 (⇒I: 89,92) ¡

x = **m** ,! 94 (Prem) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 95 (=E: 82,94) ¡

x = **m** ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 96 (⇒I: 94,95) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 97 (∨I: 88,93,96)
¡

≤[**x**,**m**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 98 (⇒I: 84,97) ¡

(≤[**x**,**m**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 99 (()I: 98) ¡

∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x]) ,! 100 (∀I: 83,99) ¡

∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 101 (∨I: 100) ¡

¬ **P**[**m**]
⇒ ∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 102 (⇒I: 82,101)
¡

$\forall x\ (\leq[x,\mathbf{m}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P}[x])$
$\vee\ \exists x\ (\leq[x,\mathbf{m}]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))$
,! 103 ($\vee$I: 51,81,102) ¡

$\forall x\ (\leq[x,\mathbf{n}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P}[x])$
$\Rightarrow \forall x\ (\leq[x,\mathbf{m}] \Rightarrow \neg\ \mathbf{P}[x])$
$\vee\ \exists x\ (\leq[x,\mathbf{m}]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))$
,! 104 ($\Rightarrow$I: 49,103) ¡

! Case 2. ¡

$\exists x\ (\leq[x,\mathbf{n}]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))$
,! 105 (Prem) ¡

$(\leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},y]))$
,! 106 ($\exists$E: 105) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},y])$
,! 107 (()E: 106) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]$,! 108 (&E: 107) ¡

$\mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 109 (&E: 107) ¡

$\forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},y])$,! 110 (&E: 107) ¡

$(\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}])$,! 111 ($\forall$E: 110) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \sigma[\mathbf{n},\mathbf{m}] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 112 (()E: 111) ¡

$\leq[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 113 ($\Rightarrow$E: 37,112) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]\ \&\ \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}]$,! 114 (&I: 108,113) ¡

$(\ \leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]\ \&\ \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]\ )$,! 115 ($\forall$E: P20) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{n}]\ \&\ \leq[\mathbf{n},\mathbf{m}] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]$,! 116 (()E: 115) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]$,! 117 ($\Rightarrow$E: 114,116) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]$,! 118 (&I: 109,117) ¡

$\leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},y])$
,! 119 (&I: 110,118) ¡

$(\leq[\mathbf{x},\mathbf{m}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{x}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[\mathbf{x},y]))$
,! 120 (()I: 119) ¡

∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 121 (∃I: 120) ¡

∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 122 (∨I: 121) ¡

∃x (≤[x,**n**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
⇒ ∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 123 (⇒I: 105,122)
¡

∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 124 (∨E: 48,104,
123) ¡

(∀x(≤[x,**m**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 125 (()I: 124) ¡

∀P (∀x(≤[x,**m**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 126 (∀I: 46,125) ¡

ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀P (∀x (≤[x,**n**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**n**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
⇒ ∀P (∀x(≤[x,**m**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 127 (⇒I: 36,126)
¡

(ω[**n**] & σ[**n**,**m**]
& ∀P (∀x (≤[x,**n**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**n**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
⇒ ∀P (∀x (≤[x,**m**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**m**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))))
,! 128 (()I: 127) ¡

∀n∀m (ω[n] & σ[n,m]
& ∀P(∀x (≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
⇒ ∀P (∀x (≤[x,m] ⇒ ¬P[x])
∨ ∃x (≤[x,m] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))))
,! 129 (∀I: 35,128) ¡
∀n (ω[n]
⇒ ∀P (∀x(≤[x,n] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,n] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))))

! 130 (Induct: 34,129) ¡

▯

! **73. The Well-Ordering Principle**: any predicate satisfied by a natural number is satisfied by a least natural number. ¡

⊦ ∀P (∃x (ω[x] & P[x])
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**x**] & **P**[**x**]) ,! 3 (∃E: 2) ¡

ω[**x**] & **P**[**x**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**x**] ,! 5 (&E: 4) ¡

P[**x**] ,! 6 (&E: 4) ¡

(ω[**x**]
⇒ ∀P (∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**x**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y]))))
,! 7 (∀E: P72) ¡

ω[**x**]
⇒ ∀P(∀x(≤[x,**x**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x(≤[x,**x**] & P[x] & ∀y(ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 8 (()E: 7) ¡

∀P (∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ P[x])
∨ ∃x (≤[x,**x**] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 9 (⇒E: 5,8) ¡

(∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**x**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y])))
,! 10 (∀E: 9) ¡

∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ **P**[x])
∨ ∃x (≤[x,**x**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 11 (()E: 10) ¡

∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ **P**[x]) ,! 12 (Prem) ¡

(ω[**x**] ⇒ ≤[**x**,**x**]) ,! 13 (∀E: P23) ¡

ω[**x**] ⇒ ≤[**x**,**x**] ,! 14 (()E: 13) ¡

≤[**x**,**x**] ,! 15 (⇒E: 5,14) ¡

(≤[**x**,**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**]) ,! 16 (∀E: 12) ¡

≤[**x**,**x**] ⇒ ¬ **P**[**x**] ,! 17 (()E: 16) ¡

¬ **P**[**x**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

¬ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 19 (Prem) ¡

ℑ ,! 20 (ℑI: 6,18) ¡

¬ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y])) ⇒ ℑ
,! 21 (⇒I: 19,20) ¡

¬¬ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 22 (¬I: 21) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 23 (¬E: 22) ¡

∀x (≤[x,**x**] ⇒ ¬ **P**[x])
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 24 (⇒I: 12,23) ¡

∃x (≤[x,**x**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 25 (Prem) ¡

(≤[**n**,**x**] & **P**[**n**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**n**,y]))
,! 26 (∃E: 25) ¡

≤[**n**,**x**] & **P**[**n**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**n**,y])
,! 27 (()E: 26) ¡

≤[**n**,**x**] ,! 28 (&E: 27) ¡

P[**n**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**n**,y]) ,! 29 (&E: 27) ¡

(≤[**n**,**x**] ⇒ ω[**n**]) ,! 30 (∀E: P6) ¡

≤[**n**,**x**] ⇒ ω[**n**] ,! 31 (()E: 30) ¡

ω[**n**] ,! 32 (⇒E: 28,31) ¡

ω[**n**] & **P**[**n**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**n**,y])
,! 33 (&I: 29,32) ¡

(ω[**n**] & **P**[**n**] & ∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**n**,y]))
,! 34 (()I: 33) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 35 (∃I: 34) ¡

∃x (≤[x,**x**] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 36 (⇒I: 25,35) ¡

$$\exists x\ (\omega[x]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))$$

,! 37 ($\vee$E: 11,24,36) ¡

$$\exists x\ (\omega[x]\ \&\ \mathbf{P}[x]) \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))$$

,! 38 ($\Rightarrow$I: 2,37) ¡

$$(\ \exists x\ (\omega[x]\ \&\ \mathbf{P}[x]) \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ \mathbf{P}[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))\ )$$

,! 39 (()I: 38) ¡

$$\forall P\ (\ \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]) \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[x,y]))\ )$$

! 40 ($\forall$I: 1,39) ¡

□

! In counterpoint to the Well-Ordering Principle, which speaks of the least finite number, P74 and P75 are an introduction to the greatest finite number. A predicate is satisfied by a greatest finite number if it is satisfied by a finite number and by only a finite number of finite numbers. ¡

! **74.** ¡

$$\vdash \forall n \forall P\ (\ \omega[n]\ \&\ \mathfrak{N}[n,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ )$$ ¡

! We prove first

$$\forall n\ (\ \omega[n] \Rightarrow \forall P\ (\ \mathfrak{N}[n,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ \omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ )\ )$$

by induction, taking ϕ to be

$$\forall P\ (\ \mathfrak{N}[n,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ )$$

It must be shown that

$$\forall P\ (\ \mathfrak{N}[0,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ )$$

and

$$\forall n \forall m\ (\ \omega[n]\ \&\ \sigma[n,m]\ \&\ \forall P\ (\ \mathfrak{N}[n,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ ) \Rightarrow \forall P\ (\ \mathfrak{N}[m,(\omega \cap P)]\ \&\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \exists x\ (\omega[x]\ \&\ P[x]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[y,x]))\ )\ )$$ ¡

```
! To prove:
    ∀P ( 𝔑[0,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
         ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )       ¡

  P                                         ,! 1 (Prem)         ¡

    𝔑[0,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ            ,! 2 (Prem)         ¡

    𝔑[0,(ω ∩ P)]                            ,! 3 (&E: 2)        ¡

    ¬ (ω ∩ P) ≡ φ                           ,! 4 (&E: 2)        ¡

    ( 𝔑[0,(ω ∩ P)] ⇒ (ω ∩ P) ≡ φ )          ,! 5 (∀E: IV3.1)    ¡

    𝔑[0,(ω ∩ P)] ⇒ (ω ∩ P) ≡ φ              ,! 6 (()E: 5)       ¡

    (ω ∩ P) ≡ φ                             ,! 7 (⇒E: 3,6)      ¡

      ¬ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                            ,! 8 (Prem)         ¡

      𝔉                                     ,! 9 (𝔉I: 4,7)      ¡

    ¬ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ⇒ 𝔉
                                            ,! 10 (⇒I: 8,9)     ¡

    ¬¬ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                            ,! 11 (¬I: 10)      ¡

    ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                            ,! 12 (¬E: 11)      ¡

  𝔑[0,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
  ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                            ,! 13 (⇒I: 2,12)    ¡

  ( 𝔑[0,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
    ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                            ,! 14 (()I: 13)     ¡

∀P ( 𝔑[0,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
     ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                            ,! 15 (∀I: 1,14)    ¡

! To prove:
    ∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
          & ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
                 ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
         ⇒ ∀P ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
                 ⇒ ∃x (ω[x] & P[x]
                       & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ) )         ¡

  n,m                                       ,! 16 (Prem)        ¡
```

```
ω[n] & σ[n,m]
& ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
       ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                                  ,! 17 (Prem)          ¡

ω[n] & σ[n,m]                                     ,! 18 (&E: 17)        ¡

∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
     ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                                  ,! 19 (&E: 17)        ¡

( ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1) )                   ,! 20 (∀E: C2.48)     ¡

ω[n] & σ[n,m] ⇒ m = (n + 1)                       ,! 21 (()E: 20)       ¡

m = (n + 1)                                       ,! 22 (⇒E: 18,21)     ¡

  P                                               ,! 23 (Prem)          ¡

    𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ                  ,! 24 (Prem)          ¡

    𝔑[m,(ω ∩ P)]                                  ,! 25 (&E: 24)        ¡

    ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ                                 ,! 26 (&E: 24)        ¡

    ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ∃x (ω ∩ P)[x] )
                                                  ,! 27 (∀E: II5.16)    ¡

    ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ∃x (ω ∩ P)[x]                 ,! 28 (()E: 27)       ¡

    ∃x (ω ∩ P)[x]                                 ,! 29 (⇒E: 26,28)     ¡

    (ω ∩ P)[a]                                    ,! 30 (∃E: 29)        ¡

    ( (ω ∩ P)[a] ⇒ ω[a] & P[a] )                  ,! 31 (∀E: II3.3)     ¡

    (ω ∩ P)[a] ⇒ ω[a] & P[a]                      ,! 32 (()E: 31)       ¡

    ω[a] & P[a]                                   ,! 33 (⇒E: 30,32)     ¡

    ω[a]                                          ,! 34 (&E: 33)        ¡

    ω[n] & σ[n,m] & (ω ∩ P)[a]                    ,! 35 (&I: 18,30)     ¡

    ω[n] & σ[n,m] & (ω ∩ P)[a] & 𝔑[m,(ω ∩ P)]
                                                  ,! 36 (&I: 25,35)     ¡

    ( ω[n] & σ[n,m] & (ω ∩ P)[a] & 𝔑[m,(ω ∩ P)]
      ⇒ 𝔑[n,((ω ∩ P) \ (a•))] )
                                                  ,! 37 (∀E: IV2.11)    ¡

    ω[n] & σ[n,m] & (ω ∩ P)[a] & 𝔑[m,(ω ∩ P)]
```

⇒ 𝔑[n,((ω ∩ P) \ (a•))]
,! 38 (()E: 37) ¡

𝔑[n,((ω ∩ P) \ (a•))] ,! 39 (⇒E: 36,38) ¡

((ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ ∨ ¬ (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ)
,! 40 (∀E: II1.48) ¡

(ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ ∨ ¬ (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ
,! 41 (()E: 40) ¡

! Case 1. ¡

(ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ ,! 42 (Prem) ¡

y ,! 43 (Prem) ¡

ω[y] & P[y] ,! 44 (Prem) ¡

ω[y] ,! 45 (&E: 44) ¡

P[y] ,! 46 (&E: 44) ¡

ω[y] & (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ
,! 47 (Prem) ¡

(ω[y] & (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ ⇒ ¬ (P \ (a•))[y])
,! 48 (∀E: II5.23) ¡

ω[y] & (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ φ ⇒ ¬ (P \ (a•))[y]
,! 49 (()E: 48) ¡

¬ (P \ (a•))[y] ,! 50 (⇒E: 47,49) ¡

P[y] & ¬ (P \ (a•))[y] ,! 51 (&I: 46,50) ¡

(P[y] & ¬ (P \ (a•))[y] ⇒ (a•)[y])
,! 52 (∀E: II7.9) ¡

P[y] & ¬ (P \ (a•))[y] ⇒ (a•)[y]
,! 53 (()E: 52) ¡

(a•)[y] ,! 54 (⇒E: 51,53) ¡

((a•)[y] ⇒ y = a) ,! 55 (∀E: II8.3) ¡

(a•)[y] ⇒ y = a ,! 56 (()E: 55) ¡

y = a ,! 57 (⇒E: 54,56) ¡

(ω[y] ⇒ ≤[y,y]) ,! 58 (∀E: P23) ¡

ω[y] ⇒ ≤[y,y] ,! 59 (()E: 58) ¡

≤[**y**,**y**] ,! 60 (⇒E: 45,59) ¡

≤[**y**,**a**] ,! 61 (=E: 57,60) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**a**] ,! 62 (⇒I: 44,61) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**a**]) ,! 63 (()I: 62) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**]) ,! 64 (∀I: 43,63) ¡

ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**])
,! 65 (&I: 33,64) ¡

(ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**]))
,! 66 (()I: 65) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 67 (∃I: 66) ¡

(ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 68 (⇒I: 42,67) ¡

! Case 2. ¡

¬ (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ϕ ,! 69 (Prem) ¡

(ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ((ω ∩ **P**) \ (**a**•))
,! 70 (∀E: II7.84) ¡

𝔑[**n**,((ω ∩ **P**) \ (**a**•))]
& (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ((ω ∩ **P**) \ (**a**•))
,! 71 (&I: 39,70) ¡

ω[**n**] ,! 72 (&E: 17) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,((ω ∩ **P**) \ (**a**•))]
& (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ((ω ∩ **P**) \ (**a**•))
,! 73 (&I: 71,72) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,((ω ∩ **P**) \ (**a**•))]
& (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ((ω ∩ **P**) \ (**a**•))
⇒ 𝔑[**n**,(ω ∩ (**P** \ (**a**•)))])
,! 74 (∀E: IV4.6) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,((ω ∩ **P**) \ (**a**•))]
& (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ((ω ∩ **P**) \ (**a**•))
⇒ 𝔑[**n**,(ω ∩ (**P** \ (**a**•)))]
,! 75 (()E: 74) ¡

𝔑[**n**,(ω ∩ (**P** \ (**a**•)))] ,! 76 (⇒I: 73,75) ¡

𝔑[n,(ω ∩ (P \ (a•)))] & ¬ (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ ϕ
,! 77 (&I: 69,76) ¡

! Applying the induction hypothesis... ¡

(𝔑[n,(ω ∩ (P \ (a•)))] & ¬ (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & (P \ (a•))[x]
& ∀y (ω[y] & (P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 78 (∀E: 19) ¡

𝔑[n,(ω ∩ (P \ (a•)))] & ¬ (ω ∩ (P \ (a•))) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & (P \ (a•))[x]
& ∀y (ω[y] & (P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 79 (()E: 78) ¡

∃x (ω[x] & (P \ (a•))[x]
& ∀y (ω[y] & (P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 80 (⇒E: 77,79) ¡

(ω[x] & (P \ (a•))[x] & ∀y ((P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 81 (∃E: 80) ¡

ω[x] & (P \ (a•))[x] & ∀y ((P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x])
,! 82 (()E: 81) ¡

ω[x] ,! 83 (&E: 82) ¡

(P \ (a•))[x] ,! 84 (&E: 82) ¡

∀y ((P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x]) ,! 85 (&E: 82) ¡

ω[a] & ω[x] ,! 86 (&I: 34,83) ¡

(ω[a] & ω[x] ⇒ ≤[a,x] ∨ ≤[x,a])
,! 87 (∀E: P64) ¡

ω[a] & ω[x] ⇒ ≤[a,x] ∨ ≤[x,a] ,! 88 (()E: 87) ¡

≤[a,x] ∨ ≤[x,a] ,! 89 (⇒E: 86,88) ¡

P[a] ,! 90 (&E: 33) ¡

(P[a] ⇒ ∀x (P[x] ⇔ (P \ (a•))[x] ∨ x = a))
,! 91 (∀E: II8.58) ¡

P[a] ⇒ ∀x (P[x] ⇔ (P \ (a•))[x] ∨ x = a)
,! 92 (()E: 91) ¡

∀x (P[x] ⇔ (P \ (a•))[x] ∨ x = a)
,! 93 (⇒E: 90,92) ¡

! Case 2a. ¡

≤[**a**,**x**] ,! 94 (Prem) ¡

((**P** \ (**a**•))[**x**] ⇒ **P**[**x**]) ,! 95 (∀E: II7.5) ¡

(**P** \ (**a**•))[**x**] ⇒ **P**[**x**] ,! 96 (()E: 95) ¡

P[**x**] ,! 97 (⇒E: 84,96) ¡

ω[**x**] & **P**[**x**] ,! 98 (&I: 83,97) ¡

y ,! 99 (Prem) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 100 (Prem) ¡

P[**y**] ,! 101 (&E: 100) ¡

(**P**[**y**] ⇔ (**P** \ (**a**•))[**y**] ∨ **y** = **a**)
,! 102 (∀E: 93) ¡

P[**y**] ⇔ (**P** \ (**a**•))[**y**] ∨ **y** = **a**
,! 103 (()E: 102) ¡

P[**y**] ⇒ (**P** \ (**a**•))[**y**] ∨ **y** = **a**
,! 104 (⇔E: 103) ¡

(**P** \ (**a**•))[**y**] ∨ **y** = **a** ,! 105 (⇒E: 101,104)
¡

((**P** \ (**a**•))[**y**] ⇒ ≤[**y**,**x**]) ,! 106 (∀E: 85) ¡

(**P** \ (**a**•))[**y**] ⇒ ≤[**y**,**x**] ,! 107 (()E: 106) ¡

y = **a** ,! 108 (Prem) ¡

≤[**y**,**x**] ,! 109 (=E: 94,108) ¡

y = **a** ⇒ ≤[**y**,**x**] ,! 110 (⇒I: 108,109)
¡

≤[**y**,**x**] ,! 111 (∨E: 105,107,110)
¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**x**] ,! 112 (⇒I: 100,111)
¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**x**]) ,! 113 (()I: 112) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**x**]) ,! 114 (∀I: 113) ¡

ω[**x**] & **P**[**x**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**x**])
,! 115 (&I: 98,114) ¡

(ω[**x**] & **P**[**x**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**x**]))
,! 116 (()I: 115) ¡

```
∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                   ,! 117 (∃I: 116)     ¡

≤[a,x] ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))
                                   ,! 118 (⇒I: 94,117)
                                                        ¡
! Case 2b.                                              ¡

    ≤[x,a]                         ,! 119 (Prem)        ¡

     y                             ,! 120 (Prem)        ¡

      ω[y] & P[y]                  ,! 121 (Prem)        ¡

      P[y]                         ,! 122 (&E: 121)     ¡

      ( P[y] ⇔ (P \ (a•))[y] ∨ y = a )
                                   ,! 123 (∀E: 93)      ¡

      P[y] ⇔ (P \ (a•))[y] ∨ y = a
                                   ,! 124 (()E: 123)    ¡

      P[y] ⇒ (P \ (a•))[y] ∨ y = a
                                   ,! 125 (⇔E: 124)     ¡

      (P \ (a•))[y] ∨ y = a        ,! 126 (⇒E: 122,125)
                                                        ¡

        (P \ (a•))[y]              ,! 127 (Prem)        ¡

        ((P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x])
                                   ,! 128 (∀E: 85)      ¡

        (P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,x]     ,! 129 (()E: 128)    ¡

        ≤[y,x]                     ,! 130 (⇒E: 127,129)
                                                        ¡

        ≤[y,x] & ≤[x,a]            ,! 131 (&I: 119,130)
                                                        ¡

        ( ≤[y,x] & ≤[x,a] ⇒ ≤[y,a] )
                                   ,! 132 (∀E: P20)     ¡

        ≤[y,x] & ≤[x,a] ⇒ ≤[y,a]
                                   ,! 133 (()E: 132)    ¡

        ≤[y,a]                     ,! 134 (⇒E: 131,133)
                                                        ¡

      (P \ (a•))[y] ⇒ ≤[y,a]       ,! 135 (⇒I: 127,134)
                                                        ¡

        y = a                      ,! 136 (Prem)        ¡
```

(ω[**a**] ⇒ ≤[**a**,**a**]) ,! 137 (∀E: P23) ¡

ω[**a**] ⇒ ≤[**a**,**a**] ,! 138 (()E: 137) ¡

≤[**a**,**a**] ,! 139 (⇒E: 34,138) ¡

≤[**y**,**a**] ,! 140 (=E: 136,139) ¡

y = **a** ⇒ ≤[**y**,**a**] ,! 141 (⇒I: 136,140) ¡

≤[**y**,**a**] ,! 142 (∨E: 126,135,141) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**a**] ,! 143 (⇒I: 121,142) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[**y**,**a**]) ,! 144 (()I: 143) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**]) ,! 145 (∀I: 120,144) ¡

ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**])
,! 146 (&I: 33,145) ¡

(ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,**a**]))
,! 147 (()I: 146) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))

,! 148 (∃I: 147) ¡

≤[**x**,**a**] ⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 149 (⇒I: 119,148) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 150 (∨E: 89,118,149) ¡

¬ (ω ∩ (**P** \ (**a**•))) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 151 (⇒I: 69,150) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 152 (∨E: 41,68,151) ¡

ℳ[**m**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 153 (⇒I: 24,152) ¡

```
    ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
      ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                                   ,! 154 (()I: 153)   ¡

  ∀P ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
         ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                                   ,! 155 (∀I: 23,154) ¡

 ω[n] & σ[n,m]
 & ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
         ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
 ⇒ ∀P ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
         ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
                                                   ,! 156 (⇒I: 17,155)
                                                                       ¡

 ( ω[n] & σ[n,m]
   & ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
           ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
   ⇒ ∀P ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
           ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ) )
                                                   ,! 157 (()I: 156)   ¡

∀n∀m ( ω[n] & σ[n,m]
        & ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
                ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) )
        ⇒ ∀P ( 𝔑[m,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
                ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ) )
                                                   ,! 158 (∀I: 16,157) ¡

∀n ( ω[n]
     ⇒ ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
             ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ) )
                                                   ,! 159 (Induct: 15,158)
                                                                       ¡

! Now to prove the proposition proper.                                 ¡

 n,P                                               ,! 160 (Prem)       ¡

   ω[n] & 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ,! 161 (Prem)                   ¡

   ω[n]                                            ,! 162 (&E: 161)    ¡

   𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ                    ,! 163 (&E: 161)    ¡

   ( ω[n]
     ⇒ ∀P ( 𝔑[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
             ⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])) ) )
                                                   ,! 164 (∀E: 159)    ¡
```

ω[**n**]
⇒ ∀P (♍[**n**,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 165 (()E: 164) ¡

∀P (♍[**n**,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 166 (⇒E: 162,165)
¡

(♍[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 167 (∀E: 166) ¡

♍[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 168 (()E: 167) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 169 (⇒E: 163,168)
¡

ω[**n**] & ♍[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 170 (⇒I: 161,169)
¡

(ω[**n**] & ♍[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 171 (()I: 170) ¡

∀n∀P (ω[n] & ♍[n,(ω ∩ P)] & ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])))
! 172 (∀I: 160,171)
¡

□

! **75.** ¡

⊢ ∀P (¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ P)
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x]))) ¡

P ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

f (ω ∩ **P**) ,! 4 (&E: 2) ¡

∃n (ω[n] & ♍[n,(ω ∩ **P**)]) ,! 5 ($E: IV5.1,4) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,(ω ∩ **P**)]) ,! 6 (∃E: 5) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,(ω ∩ **P**)] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(ω[**n**] & 𝔑[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 9 (∀E: P74) ¡

ω[**n**] & 𝔑[**n**,(ω ∩ **P**)] & ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 10 (()E: 9) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 11 (⇒E: 2,10) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ **P**)
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x]))
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ **P**)
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[y,x])))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P (¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ P)
⇒ ∃x (ω[x] & P[x] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[y,x])))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯