!CHAPTER 6

BASIC LAWS OF SUBTRACTION¡

! This chapter establishes most of the basic laws of subtraction. It has the following organization:

P1-P2: Substitution of equals for equals
P3-P4: Fundamental Laws of Subtraction, which show that subtraction is the inverse of addition
P5-17: Simple consequences of the Fundamental Laws
P18-P24: Numerical subtractions, up to (4 - 2) = 2
P25-P32: Subtractions and 0
P33-P34: Subtractions and (n-n)
P35-P37: Other equalities with 2 variables
P38-P63: Equalities with 3 variables
P64-P71: Equalities with 4 variables
P72-P73: Cancellation Laws of Subtraction
P74: Inequality with 2 variables
P75-P87: Inequalities with 3 variables
P88: Inequality with 4 variables
P89-P93: Further equalities, whose proofs rely on propositions P74-P88
P94-P99: Strict inequalities

No proof is over 50 lines, and only the Fundamental Law P3 has a proof longer than 40 lines. ¡

! P1-P2 substitute equals for equals in a subtraction term. ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & n = k ⇒ (m - n) = (m - k)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & **n** = **k** ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

n = **k** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**m** - **n**) = (**m** - **n**) ,! 5 (=I; (**m** - **n**): C5.7,3 ¡

(**m** - **n**) = (**m** - **k**) ,! 6 (=E: 4,5) ¡

≤[**n**,**m**] & **n** = **k** ⇒ (**m** - **n**) = (**m** - **k**) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] & **n** = **k** ⇒ (**m** - **n**) = (**m** - **k**)) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & n = k ⇒ (m - n) = (m - k)) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **2.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & m = k ⇒ (m - n) = (k - n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & **m** = **k** ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

m = **k** ,! 4 (&E: 2) ¡

(**m** - **n**) = (**m** - **n**) ,! 5 (=I; (**m** - **n**): C5.7,3) ¡

(**m** - **n**) = (**k** - **n**) ,! 6 (=E: 4,5) ¡

≤[**n**,**m**] & **m** = **k** ⇒ (**m** - **n**) = (**k** - **n**) ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] & **m** = **k** ⇒ (**m** - **n**) = (**k** - **n**)) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & m = k ⇒ (m - n) = (k - n))
! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! P3-P4 are the **Fundamental Laws of Subtraction.** ¡

! **3.** All subsequent propositions in this chapter rely on P3 and, except for appeals to C5.7 and C5.8, do not use chapter 5. ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m**-**n**)]) ,! 3 (∀E: C5.8) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m**-**n**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(**m**-**n**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 6 (∀E: C3.5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

ω[**n**] ,! 9 (&E: 8) ¡

ω[**m**] ,! 10 (&E: 8) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] ,! 11 (&I: 5,9) ¡

(ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] ⇒ ω[((**m**-**n**)+**n**)]) ,! 12 (∀E: C1.8; (**m**-**n**): C5.7,2) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] ⇒ ω[((**m**-**n**)+**n**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

ω[((**m**-**n**)+**n**)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[((**m**-**n**)+**n**)] & ω[**m**] ,! 15 (&I: 10,14) ¡

(≤[**n**,**m**]

⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B & 𝔑[(**m**-**n**),(B \ A)]))
,! 16 (∀E: C5.15) ¡

≤[**n**,**m**]
⇒ ∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B & 𝔑[(**m**-**n**),(B \ A)])
,! 17 (()E: 16) ¡

∃A∃B (𝔑[**n**,A] & 𝔑[**m**,B] & A ⊆ B & 𝔑[(**m**-**n**),(B \ A)])
,! 18 (⇒E: 2,17) ¡

∃B (𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,B] & **A** ⊆ B & 𝔑[(**m**-**n**),(B \ **A**)])
,! 19 (∃E: 18) ¡

(𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B** & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)])
,! 20 (∃E: 19) ¡

𝔑[**n**,**A**] & 𝔑[**m**,**B**] & **A** ⊆ **B** & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)]
,! 21 (()E: 20) ¡

𝔑[**n**,**A**] ,! 22 (&E: 21) ¡

𝔑[**m**,**B**] ,! 23 (&E: 21) ¡

A ⊆ **B** ,! 24 (&E: 21) ¡

𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] ,! 25 (&E: 21) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] ,! 26 (&I: 11,25) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] & 𝔑[**n**,**A**]
,! 27 (&I: 22,26) ¡

((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ ,! 28 (∀E: II7.81) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] & 𝔑[**n**,**A**]
& ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
,! 29 (&I: 27,28) ¡

(ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] & 𝔑[**n**,**A**]
& ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
⇒ 𝔑[((**m**-**n**)+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)])
,! 30 (∀E: C1.16;
(**m**-**n**): C5.7,2) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**n**] & 𝔑[(**m**-**n**),(**B** \ **A**)] & 𝔑[**n**,**A**]
& ((**B** \ **A**) ∩ **A**) ≡ ϕ
⇒ 𝔑[((**m**-**n**)+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)]
,! 31 (()E: 30) ¡

𝔑[((**m**-**n**)+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)] ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

ω[((**m**-**n**)+**n**)] & ω[**m**] & 𝔑[((**m**-**n**)+**n**),((**B** \ **A**) ∪ **A**)]
,! 33 (&I: 15,32) ¡

ω[((m-n)+n)] & ω[m] & ᥰ[((m-n)+n),((B \ A) ∪ A)] & ᥰ[m,B]
,! 34 (&I: 23,33) ¡

(A ⊆ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ≡ B) ,! 35 (∀E: II7.65) ¡

A ⊆ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ≡ B ,! 36 (()E: 35) ¡

((B \ A) ∪ A) ≡ B ,! 37 (⇒E: 24,36) ¡

(((B \ A) ∪ A) ≡ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ~ B)
,! 38 (∀E: III13.2) ¡

((B \ A) ∪ A) ≡ B ⇒ ((B \ A) ∪ A) ~ B
,! 39 (()E: 38) ¡

((B \ A) ∪ A) ~ B ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

ω[((m-n)+n)] & ω[m] & ᥰ[((m-n)+n),((B \ A) ∪ A)] & ᥰ[m,B]
& ((B \ A) ∪ A) ~ B
,! 41 (&I: 34,40) ¡

(ω[((m-n)+n)] & ω[m] & ᥰ[((m-n)+n),((B \ A) ∪ A)]
& ᥰ[m,B] & ((B \ A) ∪ A) ~ B
⇒ ((m-n)+n) = m)
,! 42 (∀E: IV4.7;
((m-n)+n): C1.7,11) ¡

ω[((m-n)+n)] & ω[m] & ᥰ[((m-n)+n),((B \ A) ∪ A)] & ᥰ[m,B]
& ((B \ A) ∪ A) ~ B
⇒ ((m-n)+n) = m
,! 43 (()E: 42) ¡

((m-n)+n) = m ,! 44 (⇒E: 41,43) ¡

≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m ,! 45 (⇒I: 2,44) ¡

(≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m) ,! 46 (()I: 45) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m) ! 47 (∀I: 1,46) ¡

▯

! **4.** P4 is the commutation of P3. ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ (n + (m - n)) = m) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m) ,! 3 (∀E: P3) ¡

≤[n,m] ⇒ ((m - n) + n) = m ,! 4 (()E: 3) ¡

((m - n) + n) = m ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(((m - n) + n) = m ⇒ (n + (m - n)) = m)
,! 6 (∀E: C2.6;
(m - n): C5.7,2) ¡

((m - n) + n) = m ⇒ (n + (m - n)) = m
,! 7 (()E: 6) ¡

(n + (m - n)) = m ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[n,m] ⇒ (n + (m - n)) = m ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(≤[n,m] ⇒ (n + (m - n)) = m) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ (n + (m - n)) = m) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! P5 through P14 express the connection between a simple addition and a simple subtraction equation. ¡

! **5.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (n + k) = m) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

(m - n) = k ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[n,m] ⇒ (n + (m - n)) = m) ,! 4 (∀E: P4) ¡

(≤[n,m] ⇒ (n + k) = m) ,! 5 (=E: 2,4) ¡

≤[n,m] ⇒ (n + k) = m ,! 6 (()E: 5) ¡

(n + k) = m ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(m - n) = k ⇒ (n + k) = m ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((m - n) = k ⇒ (n + k) = m) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (n + k) = m) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

□

! **6.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (k + n) = m) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

(m - n) = k ,! 2 (Prem) ¡

((m - n) = k ⇒ (n + k) = m) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**n** + **k**) = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**k** + **n**) = **m**) ,! 6 (∀E: C2.6) ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**k** + **n**) = **m** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**k** + **n**) = **m** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**k** + **n**) = **m**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (k + n) = m) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **7.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((n + k) = m ⇒ (m - n) = k) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 2 (Prem) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ,! 3 (∃I: 2) ¡

(∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**]) ,! 4 (∀E: C3.17) ¡

∃k (**n** + k) = **m** ⇒ ≤[**n**,**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ (**n** + (**m** - **n**)) = **m**) ,! 7 (∀E: P4) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ (**n** + (**m** - **n**)) = **m** ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** + (**m** - **n**)) = **m** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**n** + (**m** - **n**)) = (**n** + **k**) ,! 10 (=E: 2,9) ¡

((**n** + (**m** - **n**)) = (**n** + **k**) ⇒ (**m** - **n**) = **k**)
,! 11 (∀E: C2.63;
(**m**-**n**): C5.7,6) ¡

(**n** + (**m** - **n**)) = (**n** + **k**) ⇒ (**m** - **n**) = **k**
,! 12 (()E: 11) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k** ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m∀k ((n + k) = m ⇒ (m - n) = k)   ! 16 (∀I: 1,15)   ¡

▯

! **8.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((k + n) = m ⇒ (m - n) = k)   ¡

n,**m**,**k**   ,! 1 (Prem)   ¡

(**k** + **n**) = **m**   ,! 2 (Prem)   ¡

((**k** + **n**) = **m** ⇒ (**n** + **k**) = **m**)   ,! 3 (∀E: C2.6)   ¡

(**k** + **n**) = **m** ⇒ (**n** + **k**) = **m**   ,! 4 (()E: 3)   ¡

(**n** + **k**) = **m**   ,! 5 (⇒E: 2,4)   ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**)   ,! 6 (∀E: P7)   ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**   ,! 7 (()E: 6)   ¡

(**m** - **n**) = **k**   ,! 8 (⇒E: 5,7)   ¡

(**k** + **n**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**   ,! 9 (⇒I: 2,8)   ¡

((**k** + **n**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**)   ,! 10 (()I: 9)   ¡

∀n∀m∀k ((k + n) = m ⇒ (m - n) = k)   ! 11 (∀I: 1,10)   ¡

▯

! **9.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇔ (n + k) = m)   ¡

n,**m**,**k**   ,! 1 (Prem)   ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**n** + **k**) = **m**)   ,! 2 (∀E: P5)   ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**n** + **k**) = **m**   ,! 3 (()E: 2)   ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**)   ,! 4 (∀E: P7)   ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**   ,! 5 (()E: 4)   ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇔ (**n** + **k**) = **m**   ,! 6 (⇔I: 3,5)   ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇔ (**n** + **k**) = **m**)   ,! 7 (()I: 6)   ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇔ (n + k) = m)   ! 8 (∀I: 1,7)   ¡

▯

! **10.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇔ (k + n) = m) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

((m - n) = k ⇒ (k + n) = m) ,! 2 (∀E: P6) ¡

(m - n) = k ⇒ (k + n) = m ,! 3 (()E: 2) ¡

((k + n) = m ⇒ (m - n) = k) ,! 4 (∀E: P8) ¡

(k + n) = m ⇒ (m - n) = k ,! 5 (()E: 4) ¡

(m - n) = k ⇔ (k + n) = m ,! 6 (⇔I: 3,5) ¡

((m - n) = k ⇔ (k + n) = m) ,! 7 (()I: 6) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇔ (k + n) = m) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

□

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k = (m - n) ⇒ m = (n + k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

k = (m - n) ,! 2 (Prem) ¡

k = k ,! 3 (=I) ¡

(m - n) = k ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((m - n) = k ⇒ (n + k) = m) ,! 5 (∀E: P5) ¡

(m - n) = k ⇒ (n + k) = m ,! 6 (()E: 5) ¡

(n + k) = m ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

m = m ,! 8 (=I) ¡

m = (n + k) ,! 9 (=E: 7,8) ¡

k = (m - n) ⇒ m = (n + k) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(k = (m - n) ⇒ m = (n + k)) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀k (k = (m - n) ⇒ m = (n + k)) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **12.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k = (m - n) ⇒ m = (k + n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

k = (m - n) ,! 2 (Prem) ¡

k = **k** ,! 3 (=I) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**k** + **n**) = **m**) ,! 5 (∀E: P6) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**k** + **n**) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

m = **m** ,! 8 (=I) ¡

m = (**k** + **n**) ,! 9 (=E: 7,8) ¡

k = (**m** - **n**) ⇒ **m** = (**k** + **n**) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**k** = (**m** - **n**) ⇒ **m** = (**k** + **n**)) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀k (k = (m - n) ⇒ m = (k + n)) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **13.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (m = (n + k) ⇒ k = (m - n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**n** + **k**) ,! 2 (Prem) ¡

m = **m** ,! 3 (=I) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**) ,! 5 (∀E: P7) ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

k = **k** ,! 8 (=I) ¡

k = (**m** - **n**) ,! 9 (=E: 7,8) ¡

m = (**n** + **k**) ⇒ **k** = (**m** - **n**) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**m** = (**n** + **k**) ⇒ **k** = (**m** - **n**)) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀k (m = (n + k) ⇒ k = (m - n)) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **14.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (m = (k + n) ⇒ k = (m - n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

m = (**k** + **n**) ,! 2 (Prem) ¡

m = **m** ,! 3 (=I) ¡

(**k** + **n**) = **m** ,! 4 (=E: 2,3) ¡

((**k** + **n**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k**) ,! 5 (∀E: P8) ¡

(**k** + **n**) = **m** ⇒ (**m** - **n**) = **k** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

k = **k** ,! 8 (=I) ¡

k = (**m** - **n**) ,! 9 (=E: 7,8) ¡

m = (**k** + **n**) ⇒ **k** = (**m** - **n**) ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(**m** = (**k** + **n**) ⇒ **k** = (**m** - **n**)) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀k (m = (k + n) ⇒ k = (m - n)) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **15.** P15 shows that one can switch the differencing number and the result in a subtraction equation. ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (m - k) = n) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 2 (Prem) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**n** + **k**) = **m**) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**n** + **k**) = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** + **k**) = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **k**) = **n**) ,! 6 (∀E: P8) ¡

(**n** + **k**) = **m** ⇒ (**m** - **k**) = **n** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**m** - **k**) = **n** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**m** - **k**) = **n** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**m** - **k**) = **n**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ (m - k) = n) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! P16 and P17 are corollaries of P15. P16 uses the technique of concluding an inequality based on C5.7 and the appearance of a particular subtraction term, which will be repeated in the proofs of P74 through P39.
P16 is here (out-of-place) because it is used in the proof of P17. ¡

! **16.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ ≤[k,m]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 2 (Prem) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ (**m** - **k**) = **n**) ,! 3 (∀E: P15) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ (**m** - **k**) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**m** - **k**) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ ≤[**k**,**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ ≤[**k**,**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k ⇒ ≤[k,m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m - n) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ m = 0) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = **k** & ¬ **k** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = **k** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **k** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

((**m** - **n**) = **k** ⇒ ≤[**k**,**m**]) ,! 5 (∀E: P16) ¡

(**m** - **n**) = **k** ⇒ ≤[**k**,**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

≤[**k**,**m**] & ¬ **k** = 0 ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(≤[**k**,**m**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0) ,! 9 (∀E: C3.26) ¡

≤[**k**,**m**] & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ **m** = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**m** - **n**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0 ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

((**m** - **n**) = **k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k ((m - n) = k & ¬ k = 0 ⇒ ¬ m = 0)
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! P18 through P24 are numerical subtractions, whose proofs rely of course on their additive (or, for two equalities, their subtraction) counterparts. ¡

! **18.** ¡

⊦ (0 - 0) = 0 ¡

((0 + 0) = 0 ⇒ (0 - 0) = 0) ,! 1 (∀E: P7) ¡

(0 + 0) = 0 ⇒ (0 - 0) = 0 ,! 2 (()E: 1) ¡

(0 - 0) = 0 ,! 3 (⇒E: C2.65,2) ¡

▯

! **19.** ¡

⊦ (2 - 1) = 1 ¡

((1 + 1) = 2 ⇒ (2 - 1) = 1) ,! 1 (∀E: P7) ¡

(1 + 1) = 2 ⇒ (2 - 1) = 1 ,! 2 (()E: 1) ¡

(2 - 1) = 1 ,! 3 (⇒E: C2.69,2) ¡

▯

! **20.** ¡

⊦ (3 - 1) = 2 ¡

((2 + 1) = 3 ⇒ (3 - 1) = 2) ,! 1 (∀E: P8) ¡

(2 + 1) = 3 ⇒ (3 - 1) = 2 ,! 2 (()E: 1) ¡

(3 - 1) = 2 ,! 3 (⇒E: C2.70,2) ¡

▯

! **21.** ¡

⊦ (3 - 2) = 1 ¡

((3 - 1) = 2 ⇒ (3 - 2) = 1) ,! 1 (∀E: P15) ¡

(3 - 1) = 2 ⇒ (3 - 2) = 1 ,! 2 (()E: 1) ¡

(3 - 2) = 1 ,! 3 (⇒E: P20,2) ¡

▯

! **22.** ¡

⊦ (4 - 1) = 3 ¡

((3 + 1) = 4 ⇒ (4 - 1) = 3) ,! 1 (∀E: P8) ¡

(3 + 1) = 4 ⇒ (4 - 1) = 3 ,! 2 (()E: 1) ¡

(4 - 1) = 3 ,! 3 (⇒E: C2.72,2) ¡

▯

! **23.** ¡

⊦ (4 - 3) = 1 ¡

((4 - 1) = 3 ⇒ (4 - 3) = 1) ,! 1 (∀E: P15) ¡

(4 - 1) = 3 ⇒ (4 - 3) = 1 ,! 2 (()E: 1) ¡

(4 - 3) = 1 ,! 3 (⇒E: P22,2) ¡

▯

! **24.** ¡

⊦ (4 - 2) = 2 ¡

((2 + 2) = 4 ⇒ (4 - 2) = 2) ,! 1 (∀E: P7) ¡

(2 + 2) = 4 ⇒ (4 - 2) = 2 ,! 2 (()E: 1) ¡

(4 - 2) = 2 ,! 3 (⇒E: C2.74,2) ¡

▯

! **25.** The result of subtracting 0 is the original number. ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ (n - 0) = n) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n**) ,! 3 (∀E: C2.32) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** + 0) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** + 0) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**n** + 0) = **n** ⇒ (**n** - 0) = **n**) ,! 6 (∀E: P8) ¡

(**n** + 0) = **n** ⇒ (**n** - 0) = **n** ,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** - 0) = **n** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (n - 0) = n) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **26.** Subtracting a number from itself yields 0. ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ (n - n) = 0) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n**) ,! 3 (∀E: C2.25) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** - 0) = **n** ,! 5 (⇒E: 2.4) ¡

((**n** - 0) = **n** ⇒ (**n** - **n**) = 0) ,! 6 (∀E: P15) ¡

(**n** - 0) = **n** ⇒ (**n** - **n**) = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

(**n** - **n**) = 0 ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** - **n**) = 0 ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** - **n**) = 0) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (n - n) = 0) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **27.** P27 is a corollary of P26. ¡

⊦ ∀n∀m (n = m & ω[n] ⇒ (n - m) = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n = **m** & ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

n = **m** ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** - **n**) = 0) ,! 5 (∀E: P26) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** - **n**) = 0 ,! 6 (()E: 5) ¡

(**n** - **n**) = 0 ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(**n** - **m**) = 0 ,! 8 (=E: 3,7) ¡

n = **m** & ω[**n**] ⇒ (**n** - **m**) = 0 ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**n** = **m** & ω[**n**] ⇒ (**n** - **m**) = 0) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (n = m & ω[n] ⇒ (n - m) = 0) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **28.** Only 0 can result from a subtraction from 0. ¡

⊦ ∀n∀m (n = (0 - m) ⇒ n = 0) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n = (0 - **m**) ,! 2 (Prem) ¡

≤[**m**,0] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0) ,! 4 (∀E: C3.25) ¡

≤[**m**,0] ⇒ **m** = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

m = 0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

n = (0 - 0) ,! 7 (=E: 2,6) ¡

n = 0 ,! 8 (=E: P18) ¡

n = (0 - **m**) ⇒ **n** = 0 ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(**n** = (0 - **m**) ⇒ **n** = 0) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (n = (0 - m) ⇒ n = 0) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **29.** Only 0 does not change a number upon subtraction. ¡

⊦ ∀n∀m ((m - n) = m ⇒ n = 0) ¡

m,**n** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = **m** ,! 2 (Prem) ¡

((**m** - **n**) = **m** ⇒ (**m** + **n**) = **m**) ,! 3 (∀E: P6) ¡

(**m** - **n**) = **m** ⇒ (**m** + **n**) = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**m** + **n**) = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**m** + **n**) = **m** ⇒ **n** = 0) ,! 6 (∀E: C2.38) ¡

(**m** + **n**) = **m** ⇒ **n** = 0 ,! 7 (()E: 6) ¡

n = 0 ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**m** - **n**) = **m** ⇒ **n** = 0 ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**m** - **n**) = **m** ⇒ **n** = 0) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m ((m - n) = m ⇒ n = 0) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **30.** P30 is a corollary of P25. ¡

⊦ ∀n∀m (n = (m - 0) ⇒ n = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n = (**m** - 0) ,! 2 (Prem) ¡

≤[0,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5,7,2) ¡

(≤[0,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 4 (∀E: C3.7) ¡

≤[0,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**m**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

(ω[**m**] ⇒ (**m** - 0) = **m**) ,! 7 (∀E: P25) ¡

ω[**m**] ⇒ (**m** - 0) = **m** ,! 8 (()E: 7) ¡

(**m** - 0) = **m** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

n = **m** ,! 10 (=E: 2,9) ¡

n = (**m** - 0) ⇒ **n** = **m** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**n** = (**m** - 0) ⇒ **n** = **m**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (n = (m - 0) ⇒ n = m) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! P31 and P32 establish that when a subtraction result is 0, the number subtracted must equal the original number. ¡

! **31.** ¡

⊦ ∀n∀m ((m - n) = 0 ⇒ n = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = 0 ,! 2 (Prem) ¡

((**m** - **n**) = 0 ⇒ (**n** + 0) = **m**) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(**m** - **n**) = 0 ⇒ (**n** + 0) = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** + 0) = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m**) ,! 6 (∀E: C2.34) ¡

(**n** + 0) = **m** ⇒ **n** = **m** ,! 7 (()E: 6) ¡

n = **m** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(**m** - **n**) = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((**m** - **n**) = 0 ⇒ **n** = **m**) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m ((m - n) = 0 ⇒ n = m) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **32.** ¡

⊢ ∀n∀m ((m - n) = 0 ⇒ m = n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = 0 ,! 2 (Prem) ¡

((**m** - **n**) = 0 ⇒ **n** = **m**) ,! 3 (∀E: P31) ¡

(**m** - **n**) = 0 ⇒ **n** = **m** ,! 4 (()E: 3) ¡

n = **m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

n = **n** ,! 6 (=I) ¡

m = **n** ,! 7 (=E: 5,6) ¡

(**m** - **n**) = 0 ⇒ **m** = **n** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**m** - **n**) = 0 ⇒ **m** = **n**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m ((m - n) = 0 ⇒ m = n) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! P33 and P34 are commutative permutations. ¡

! **33.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (m + (n-n)) = m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**m**] ⇒ (**m** + 0) = **m**) ,! 5 (∀E: C2.32) ¡

ω[**m**] ⇒ (**m** + 0) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

(**m** + 0) = **m** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(ω[n] ⇒ (n-n) = 0) ,! 8 (∀E: P26) ¡

ω[n] ⇒ (n-n) = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

(n-n) = 0 ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

(m + (n-n)) = m ,! 11 (=E: 7,10) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ (m + (n-n)) = m ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ (m + (n-n)) = m) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (m + (n-n)) = m) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **34.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ((n-n) + m) = m) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[m] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[m] ⇒ (0 + m) = m) ,! 5 (∀E: C2.33) ¡

ω[m] ⇒ (0 + m) = m ,! 6 (()E: 5) ¡

(0 + m) = m ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(ω[n] ⇒ (n-n) = 0) ,! 8 (∀E: P26) ¡

ω[n] ⇒ (n-n) = 0 ,! 9 (()E: 8) ¡

(n-n) = 0 ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

((n-n) + m) = m ,! 11 (=E: 7,10) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ((n-n) + m) = m ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ((n-n) + m) = m) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ((n-n) + m) = m) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! P35 and P36 are commutative permuations. ¡

! **35.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - m) = n) ¡

```
  n,m                                        ,! 1 (Prem)          ¡
    ω[n] & ω[m]                              ,! 2 (Prem)          ¡
    (n + m) = (n+m)                          ,! 3 (=I;
                                             (n + m): C1.7,2)     ¡
    ( (n + m) = (n+m) ⇒ ((n+m) - m) = n )
                                             ,! 4 (∀E: P8;
                                             (n+m): C1.7,2)       ¡
    (n + m) = (n+m) ⇒ ((n+m) - m) = n        ,! 5 (()E: 4)        ¡
    ((n + m) - m) = n                        ,! 6 (⇒E: 3,5)       ¡
  ω[n] & ω[m] ⇒ ((n + m) - m) = n            ,! 7 (⇒I: 2,6)       ¡
  ( ω[n] & ω[m] ⇒ ((n + m) - m) = n )        ,! 8 (()I: 7)        ¡
∀n∀m ( ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - m) = n )        ! 9 (∀I: 1,8)       ¡
▯
! 36.                                                             ¡
⊦ ∀n∀m ( ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - n) = m )                          ¡
  n,m                                        ,! 1 (Prem)          ¡
    ω[n] & ω[m]                              ,! 2 (Prem)          ¡
    (n + m) = (n+m)                          ,! 3 (=I;
                                             (n + m): C1.7,2)     ¡
    ( (n + m) = (n+m) ⇒ ((n+m) - n) = m )
                                             ,! 4 (∀E: P7;
                                             (n+m): C1.7,2)       ¡
    (n + m) = (n+m) ⇒ ((n+m) - n) = m
                                             ,! 5 (()E: 4)        ¡
    ((n+m) - n) = m                          ,! 6 (⇒E: 3,5)       ¡
  ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - n) = m              ,! 7 (⇒I: 2,6)       ¡
  ( ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - n) = m )          ,! 8 (()I: 7)        ¡
∀n∀m ( ω[n] & ω[m] ⇒ ((n+m) - n) = m )        ! 9 (∀I: 1,8)       ¡
▯
! 37.                                                             ¡
⊦ ∀n∀m ( ≤[n,m] ⇒ (m - (m-n)) = n )                               ¡
  n,m                                        ,! 1 (Prem)          ¡
```

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(**m** - **n**) = (**m**-**n**) ,! 3 (=I; (**m** - **n**): C5.7,2) ¡

((**m** - **n**) = (**m**-**n**) ⇒ (**m** - (**m**-**n**)) = **n**) ,! 4 (∀E: P15; (**m**-**n**): C5.7,2) ¡

(**m** - **n**) = (**m** - **n**) ⇒ (**m** - (**m**-**n**)) = **n** ,! 5 (()E: 4) ¡

(**m** - (**m**-**n**)) = **n** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ (**m** - (**m**-**n**)) = **n** ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ (**m** - (**m**-**n**)) = **n**) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ (m - (m-n)) = n) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! P38 through P63 establish various permutations of subtraction equalities innvolving three variables. ¡

! **38.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - n) = ((m-n) + k)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**]) ,! 5 (∀E: C3.7) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**m** + **k**) = (**m** + **k**) ,! 9 (=I; (**m** + **k**): C1.7,8) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m**) ,! 10 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 11 (()E: 10) ¡

((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 12 (⇒E: 3,11) ¡

(((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m** + **k**) ,! 13 (=E: 9,12) ¡

((((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m** + **k**)

⇒ (((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m** + **k**)) ,! 14 (∀E: C2.20;
(**m**-**n**): C5.7,3;
(**m** + **k**): C1.7,8) ¡

(((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m** + **k**) ⇒ (((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m** + **k**)
,! 15 (()E: 14) ¡

(((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m** + **k**) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m**-**n**)]) ,! 17 (∀E: C5.8) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[(**m**-**n**)] ,! 18 (()E: 17) ¡

ω[(**m**-**n**)] ,! 19 (⇒E: 3,18) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[**k**] ,! 20 (&I: 4,19) ¡

((((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m** + **k**)
⇒ ((**m** + **k**) - **n**) = ((**m**-**n**) + **k**))
,! 21 (∀E: P8;
((**m**-**n**) + **k**): C1.7,20;
(**m** + **k**): C1.7,8) ¡

(((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m** + **k**) ⇒ ((**m** + **k**) - **n**) = ((**m**-**n**) + **k**)
,! 22 (()E: 21) ¡

((**m**+**k**) - **n**) = ((**m**-**n**) + **k**) ,! 23 (⇒E: 16,22) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - **n**) = ((**m**-**n**) + **k**)
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - **n**) = ((**m**-**n**) + **k**))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - n) = ((m-n) + k))
! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **39.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n))) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**k**] & ω[**m**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**k**] & ω[**m**] ⇒ ((**k**+**m**) - **n**) = ((**k**-**n**) + **m**))
,! 5 (∀E: P38) ¡

≤[**n**,**k**] & ω[**m**] ⇒ ((**k**+**m**) - **n**) = ((**k**-**n**) + **m**)
,! 6 (()E: 5) ¡

((k+m) - n) = ((k-n) + m) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(≤[n,k] ⇒ ω[k]) ,! 8 (∀E: C3.7) ¡

≤[n,k] ⇒ ω[k] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[k] ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

(ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m)) ,! 12 (∀E: C2.5) ¡

ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m) ,! 13 (()E: 12) ¡

(m+k) = (k+m) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

((m+k) - n) = ((k-n) + m) ,! 15 (=E: 7,14) ¡

ω[(k-n)] & ω[m] ,! 16 (𝕋E: C1.7,15) ¡

(ω[(k-n)] & ω[m] ⇒ ((k-n) + m) = (m + (k-n)))
,! 17 (∀E: C2.5;
(k-n): C5.7,3) ¡

ω[(k-n)] & ω[m] ⇒ ((k-n) + m) = (m + (k-n))
,! 18 (()E: 17) ¡

((k-n) + m) = (m + (k-n)) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

((m+k) - n) = (m + (k-n)) ,! 20 (=E: 15,19) ¡

≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n))
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n)))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n)))
! 23 (∀I: 1,22) ¡

□

! **40.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,k] & ≤[n,m] ⇒ ((m-n) + k) = (m + (k-n))) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,k] & ≤[n,m] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,k] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[n,m] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,k] ⇒ ω[k]) ,! 5 (∀E: C3.7) ¡

≤[n,k] ⇒ ω[k] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[k] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[m]) ,! 8 (∀E: C3.7) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[m] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[m] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

≤[n,k] & ω[m] ,! 11 (&I: 3,10) ¡

(≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n)))
,! 12 (∀E: P39) ¡

≤[n,k] & ω[m] ⇒ ((m+k) - n) = (m + (k-n))
,! 13 (()E: 12) ¡

((m+k) - n) = (m + (k-n)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 15 (&I: 4,7) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - n) = ((m-n) + k))
,! 16 (∀E: P38) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - n) = ((m-n) + k)
,! 17 (()E: 16) ¡

((m+k) - n) = ((m-n) + k) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

((m-n) + k) = (m + (k-n)) ,! 19 (=E: 14,18) ¡

≤[n,k] & ≤[n,m] ⇒ ((m-n) + k) = (m + (k-n))
,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

(≤[n,k] & ≤[n,m] ⇒ ((m-n) + k) = (m + (k-n)))
,! 21 (()I: 20) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,k] & ≤[n,m] ⇒ ((m-n) + k) = (m + (k-n)))
! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯

! **41.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)]) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

ω[n] & ω[m] ⇒ ω[(n+m)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(n+m)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[(n+m)] & ω[k] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[(n+m)] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m))
,! 9 (∀E: P35;
(n+m): C1.7,3) ¡

ω[(n+m)] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m)
,! 10 (()E: 9) ¡

(((n+m)+k) - k) = (n+m) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - k) = (n+m))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **42.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - m) = (n+k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[n] & ω[k] & ω[m] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(ω[n] & ω[k] & ω[m] ⇒ (((n+k)+m) - m) = (n+k))
,! 6 (∀E: P41) ¡

ω[n] & ω[k] & ω[m] ⇒ (((n+k)+m) - m) = (n+k)
,! 7 (()E: 6) ¡

(((n+k)+m) - m) = (n+k) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m)+k) = ((n+k)+m))
,! 9 (∀E: C2.19) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m)+k) = ((n+k)+m)

,! 10 (()E: 9) ¡

((n+m)+k) = ((n+k)+m) ,! 11 (⇒E: 2,10) ¡

(((n+m)+k) - m) = (n+k) ,! 12 (=E: 8,11) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - m) = (n+k)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - m) = (n+k))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - m) = (n+k))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **43.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - n) = (m+k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[m] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[m] & ω[n] & ω[k] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(ω[m] & ω[n] & ω[k] ⇒ (((m+n)+k) - n) = (m+k))
,! 7 (∀E: P42) ¡

ω[m] & ω[n] & ω[k] ⇒ (((m+n)+k) - n) = (m+k)
,! 8 (()E: 7) ¡

(((m+n)+k) - n) = (m+k) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[m] & ω[n] ,! 10 (&I: 3,4) ¡

(ω[m] & ω[n] ⇒ (m+n) = (n+m)) ,! 11 (∀E: C2.5) ¡

ω[m] & ω[n] ⇒ (m+n) = (n+m) ,! 12 (()E: 11) ¡

(m+n) = (n+m) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(((n+m)+k) - n) = (m+k) ,! 14 (=E: 9,13) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - n) = (m+k)
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - n) = (m+k))

,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ (((n+m)+k) - n) = (m+k))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **44.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m) + (k-k)) = (n+m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**+**m**)]) ,! 5 (∀E: C3.5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**n**+**m**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(**n**+**m**)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**k**] & ω[(**n**+**m**)] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[**k**] & ω[(**n**+**m**)] ⇒ ((**n**+**m**) + (**k**-**k**)) = (**n**+**m**))
,! 9 (∀E: P33;
(**n**+**m**): C1.7,3) ¡

ω[**k**] & ω[(**n**+**m**)] ⇒ ((**n**+**m**) + (**k**-**k**)) = (**n**+**m**)
,! 10 (()E: 9) ¡

((**n**+**m**) + (**k**-**k**)) = (**n**+**m**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**m**) + (**k**-**k**)) = (**n**+**m**)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**m**) + (**k**-**k**)) = (**n**+**m**))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m) + (k-k)) = (n+m))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **45.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m) + (k-k)) = (n+m))
,! 4 (∀E: P44) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((n+m) + (k-k)) = (n+m)
,! 5 (()E: 4) ¡

((n+m) + (k-k)) = (n+m) ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

ω[(n+m)] & ω[(k-k)] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

ω[(k-k)] ,! 8 (&E: 7) ¡

≤[k,k] ,! 9 (𝕋E: C5.7,8) ¡

(((n+m) + (k-k)) = (n+m) ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m))
,! 10 (∀E: C2.6;
(n+m): C1.7,3;
(k-k): C5.7,9) ¡

((n+m) + (k-k)) = (n+m) ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m)
,! 11 (()E: 10) ¡

((k-k) + (n+m)) = (n+m) ,! 12 (⇒E: 6,11) ¡

ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (ω[n] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (n+m)) = (n+m))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **46.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)]) ,! 5 (∀E: C5.8) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(m-n)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[k] & ω[(m-n)] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[k] & ω[(m-n)] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n))
,! 9 (∀E: P33;
(m-n): C5.7,3) ¡

ω[k] & ω[(m-n)] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n)
,! 10 (()E: 9) ¡

((m-n) + (k-k)) = (m-n) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **47.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (m-n)) = (m-n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n))
,! 4 (∀E: P46) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k-k)) = (m-n)
,! 5 (()E: 4) ¡

((m-n) + (k-k)) = (m-n) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[(m-n)] & ω[(k-k)] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

ω[(k-k)] ,! 8 (&E: 7) ¡

≤[k,k] ,! 9 (𝕋E: C5.7,8) ¡

(((m-n) + (k-k)) = (m-n) ⇒ ((k-k) + (m-n)) = (m-n))
,! 10 (∀E: C2.6;
(m-n): C5.7,8;
(k-k): C5.7,9) ¡

((m-n) + (k-k)) = (m-n) ⇒ ((k-k) + (m-n)) = (m-n)
,! 11 (()E: 10) ¡

((k-k) + (m-n)) = (m-n) ,! 12 (⇒E: 6,11) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (m-n)) = (m-n)

,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**k**-**k**) + (**m**-**n**)) = (**m**-**n**))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k-k) + (m-n)) = (m-n))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **48.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m**) ,! 5 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**k**] & ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(ω[**k**] & ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ⇒ (((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m**+**k**))
,! 9 (∀E: C2.3;
(**m**-**n**): C5.7,3) ¡

ω[**k**] & ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ⇒ (((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m**+**k**)
,! 10 (()E: 9) ¡

(((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m**+**k**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 12 (𝕋E: C1.7,11) ¡

((((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m**+**k**) ⇒ (((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m**+**k**))
,! 13 (∀E: C3.23;
(**m**-**n**): C5.7,3;
(**m**+**k**): C1.7,12) ¡

(((**m**-**n**) + **n**) + **k**) = (**m**+**k**) ⇒ (((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m**+**k**)
,! 14 (()E: 13) ¡

(((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m**+**k**) ,! 15 (⇒E: 11,14) ¡

((((**m**-**n**) + **k**) + **n**) = (**m**+**k**) ⇒ ((**m**-**n**) + (**k**+**n**)) = (**m**+**k**))
,! 16 (∀E: C3.16;
(**m**-**n**): C5.7,3;
(**m**+**k**): C1.7,12) ¡

(((m-n) + k) + n) = (m+k) ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)
,! 17 (()E: 16) ¡

((m-n) + (k+n)) = (m+k) ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **49.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (n+k)) = (m+k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k))
,! 3 (∀E: P48) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)
,! 4 (()E: 3) ¡

((m-n) + (k+n)) = (m+k) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(m-n)] & ω[(k+n)] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(k+n)] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[k] & ω[n] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

(ω[k] & ω[n] ⇒ (k+n) = (n+k)) ,! 9 (∀E: C2.5) ¡

ω[k] & ω[n] ⇒ (k+n) = (n+k) ,! 10 (()E: 9) ¡

(k+n) = (n+k) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((m-n) + (n+k)) = (m+k) ,! 12 (=E: 5,11) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (n+k)) = (m+k)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (n+k)) = (m+k))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (n+k)) = (m+k))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

```
▯

! 50.                                                        ¡

⊢ ∀n∀m∀k ( ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+n) + (m-n)) = (k+m) )        ¡

  n,m,k                                     ,! 1 (Prem)      ¡

    ≤[n,m] & ω[k]                           ,! 2 (Prem)      ¡

    ( ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k) )
                                            ,! 3 (∀E: P48)   ¡

    ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)
                                            ,! 4 (()E: 3)    ¡

    ((m-n) + (k+n)) = (m+k)                 ,! 5 (⇒E: 2,4)   ¡

    ω[(m-n)] & ω[(k+n)]                     ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

    ( ((m-n) + (k+n)) = (m+k) ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (k+m) )
                                            ,! 7 (∀E: C2.7;
                                           ((m-n) + (k+n)): C1.7,6)
                                                             ¡

    ((m-n) + (k+n)) = (m+k) ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (k+m)
                                            ,! 8 (()E: 7)    ¡

    ((m-n) + (k+n)) = (k+m)                 ,! 9 (⇒E: 5,8)   ¡

    ≤[n,m]                                  ,! 10 (&E: 2)    ¡

    ω[(k+n)]                                ,! 11 (&E: 6)    ¡

    ω[k] & ω[n]                             ,! 12 (𝕋E: C1.7,11)¡

    ( ω[(m-n)] & ω[(k+n)]
      ⇒ ((m-n) + (k+n)) = ((k+n) + (m-n)) )
                                            ,! 13 (∀E: C2.5;
                                            (m-n): C5.7,10;
                                            (k+n): C1.7,12)  ¡

    ω[(m-n)] & ω[(k+n)] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = ((k+n) + (m-n))
                                            ,! 14 (()E: 13)  ¡

    ((m-n) + (k+n)) = ((k+n) + (m-n))       ,! 15 (⇒E: 6,14) ¡

    ((k+n) + (m-n)) = (k+m)                 ,! 16 (=E: 9,15) ¡

  ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+n) + (m-n)) = (k+m)
                                            ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

  ( ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+n) + (m-n)) = (k+m) )
                                            ,! 18 (()I: 17)  ¡

∀n∀m∀k ( ≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+n) + (m-n)) = (k+m) )
```

! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **51.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((n+k) + (m-n)) = (k+m)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**k**+**n**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**))
,! 3 (∀E: P50) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**k**+**n**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**k**+**n**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(**k**+**n**)] & ω[(**m**-**n**)] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(**k**+**n**)] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k**+**n**) = (**n**+**k**)) ,! 9 (∀E: C2.5) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k**+**n**) = (**n**+**k**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(**k**+**n**) = (**n**+**k**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((**n**+**k**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**) ,! 12 (=E: 5,11) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**k**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**k**) + (**m**-**n**)) = (**k**+**m**))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((n+k) + (m-n)) = (k+m))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **52.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**k**,**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)]) ,! 6 (∀E: C5.8) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[(m-n)] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[(m-n)] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

≤[k,n] & ω[(m-n)] ,! 9 (&I: 4,8) ¡

(≤[k,n] & ω[(m-n)] ⇒ (((m-n)+n) - k) = ((m-n) + (n-k)))
,! 10 (∀E: P39;
(m-n): C5.7,3) ¡

≤[k,n] & ω[(m-n)] ⇒ (((m-n)+n) - k) = ((m-n) + (n-k))
,! 11 (()E: 10) ¡

(((m-n)+n) - k) = ((m-n) + (n-k)) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(≤[n,m] ⇒ ((m-n)+n) = m) ,! 13 (∀E: P3) ¡

≤[n,m] ⇒ ((m-n)+n) = m ,! 14 (()E: 13) ¡

((m-n)+n) = m ,! 15 (⇒E: 3,14) ¡

(m-k) = ((m-n) + (n-k)) ,! 16 (=E: 12,15) ¡

(m-k) = (m-k) ,! 17 (=E: 16,16) ¡

((m-n) + (n-k)) = (m-k) ,! 18 (=E: 16,17) ¡

≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k)
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k))
,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k))
! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **53.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((n-k) + (m-n)) = (m-k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ≤[k,n] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k))
,! 3 (∀E: P52) ¡

≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((m-n) + (n-k)) = (m-k)
,! 4 (()E: 3) ¡

((m-n) + (n-k)) = (m-k) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[(**n**-**k**)] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(**m**-**n**)] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[(**n**-**k**)] ,! 8 (&E: 6) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 9 (𝕋E: C5.7,7) ¡

≤[**k**,**n**] ,! 10 (𝕋E: C5.7,8) ¡

(ω[(**m**-**n**)] & ω[(**n**-**k**)]
⇒ ((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = ((**n**-**k**) + (**m**-**n**)))
,! 11 (∀E: C2.5;
(**m**-**n**): C5.7,9;
(**n**-**k**): C5.7,10) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[(**n**-**k**)] ⇒ ((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = ((**n**-**k**) + (**m**-**n**))
,! 12 (()E: 11) ¡

((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = ((**n**-**k**) + (**m**-**n**)) ,! 13 (⇒E: 6,12) ¡

((**n**-**k**) + (**m**-**n**)) = (**m**-**k**) ,! 14 (=E: 5,13) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ⇒ ((**n**-**k**) + (**m**-**n**)) = (**m**-**k**)
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ⇒ ((**n**-**k**) + (**m**-**n**)) = (**m**-**k**))
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[k,n] ⇒ ((n-k) + (m-n)) = (m-k))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **54.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (n+k)) = (m-n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**n**+**k**)) = (**m**+**k**))
,! 3 (∀E: P49) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**n**+**k**)) = (**m**+**k**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**m**-**n**) + (**n**+**k**)) = (**m**+**k**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(**m**-**n**)] & ω[(**n**+**k**)] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 7 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(**n**+**k**)] ,! 8 (&E: 6) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 9 (𝕋E: C1.7,8) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 10 (&E: 2) ¡

(((**m**-**n**) + (**n**+**k**)) = (**m**+**k**) ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**))
,! 11 (∀E: P8;
(**m**-**n**): C5.7,10;
(**n**+**k**): C1.7,9;
(**m**+**k**): C1.7,7) ¡

((**m**-**n**) + (**n**+**k**)) = (**m**+**k**) ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**)
,! 12 (()E: 11) ¡

((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**) ,! 13 (⇒E: 5,12) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**)
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (n+k)) = (m-n))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **55.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (k+n)) = (m-n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**))
,! 3 (∀E: P54) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**m**+**k**) - (**n**+**k**)) = (**m**-**n**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**n**+**k**),(**m**+**k**)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**)) ,! 8 (∀E: C2.5,7) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 9 (()E: 8) ¡

(**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((**m**+**k**) - (**k**+**n**)) = (**m**-**n**) ,! 11 (=E: 5,10) ¡

≤[**n**,**m**] & ω[**k**] ⇒ ((**m**+**k**) - (**k**+**n**)) = (**m**-**n**)

,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (k+n)) = (m-n))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (k+n)) = (m-n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **56.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (n+k)) = (m-n))
,! 3 (∀E: P54) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (n+k)) = (m-n)
,! 4 (()E: 3) ¡

((m+k) - (n+k)) = (m-n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(n+k),(m+k)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

(ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m)) ,! 8 (∀E: C2.5,7) ¡

ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m) ,! 9 (()E: 8) ¡

(m+k) = (k+m) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((k+m) - (n+k)) = (m-n) ,! 11 (=E: 5,10) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **57.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (k+n)) = (m-n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n))
,! 3 (∀E: P56) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (n+k)) = (m-n)
,! 4 (()E: 3) ¡

((k+m) - (n+k)) = (m-n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(n+k),(k+m)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

ω[n] & ω[k] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

(ω[n] & ω[k] ⇒ (n+k) = (k+n)) ,! 8 (∀E: C2.5,7) ¡

ω[n] & ω[k] ⇒ (n+k) = (k+n) ,! 9 (()E: 8) ¡

(n+k) = (k+n) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((k+m) - (k+n)) = (m-n) ,! 11 (=E: 5,10) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (k+n)) = (m-n)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (k+n)) = (m-n))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (k+n)) = (m-n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **58.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (k+n)) = (m-n))
,! 3 (∀E: P55) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (k+n)) = (m-n)
,! 4 (()E: 3) ¡

((m+k) - (k+n)) = (m-n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(k+n),(m+k)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

ω[k] & ω[n] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 8 (𝕋E: C1.7,6) ¡

≤[n,m] ,! 9 (&E: 2) ¡

(((m+k) - (k+n)) = (m-n) ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n))
,! 10 (∀E: P15;
(m+k): C1.7,8;
(k+n): C1.7,7;
(m-n): C5.7,9) ¡

((m+k) - (k+n)) = (m-n) ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n)
,! 11 (()E: 10) ¡

((m+k) - (m-n)) = (k+n) ,! 12 (⇒E: 5,11) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **59.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (m-n)) = (k+n)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n))
,! 3 (∀E: P58) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m+k) - (m-n)) = (k+n)
,! 4 (()E: 3) ¡

((m+k) - (m-n)) = (k+n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(m-n),(m+k)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 7 (𝕋E: C1.7,6) ¡

(ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m)) ,! 8 (∀E: C2.5) ¡

ω[m] & ω[k] ⇒ (m+k) = (k+m) ,! 9 (()E: 8) ¡

(m+k) = (k+m) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

((k+m) - (m-n)) = (k+n) ,! 11 (=E: 5,10) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (m-n)) = (k+n)
,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (m-n)) = (k+n))
,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((k+m) - (m-n)) = (k+n))
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **60.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ((k-n) - (k-m)) = (m-n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

≤[**m**,**k**] & ≤[**n**,**m**] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(≤[**m**,**k**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**k**-**m**)) = (**k**-**n**))
,! 6 (∀E: P53) ¡

≤[**m**,**k**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**k**-**m**)) = (**k**-**n**)
,! 7 (()E: 6) ¡

((**m**-**n**) + (**k**-**m**)) = (**k**-**n**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 9 (𝕋E: C5.7,8) ¡

(((**m**-**n**) + (**k**-**m**)) = (**k**-**n**) ⇒ ((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**))
,! 10 (∀E: P8;
(**m**-**n**): C5.7,3;
(**k**-**m**): C5.7,4;
(**k**-**n**): C5.7,9) ¡

((**m**-**n**) + (**k**-**m**)) = (**k**-**n**) ⇒ ((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**)
,! 11 (()E: 10) ¡

((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**) ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**)-(**k**-**m**)) = (**m**-**n**)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**)-(**k**-**m**)) = (**m**-**n**))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ((k-n) - (k-m)) = (m-n))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! **61.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[k,n] & ≤[n,m] ⇒ ((m-k) - (n-k)) = (m-n)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**k**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**k**,**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = (**m**-**k**))
,! 6 (∀E: P52) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**k**,**n**] ⇒ ((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = (**m**-**k**)
,! 7 (()E: 6) ¡

((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = (**m**-**k**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 9 (𝕋E: C5.7,8) ¡

(((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = (**m**-**k**) ⇒ ((**m**-**k**) - (**n**-**k**)) = (**m**-**n**))
,! 10 (∀E: P8;
(**m**-**n**): C5.7,4;
(**n**-**k**): C5.7,3;
(**m**-**k**): C5.7,9) ¡

((**m**-**n**) + (**n**-**k**)) = (**m**-**k**) ⇒ ((**m**-**k**) - (**n**-**k**)) = (**m**-**n**)
,! 11 (()E: 10) ¡

((**m**-**k**) - (**n**-**k**)) = (**m**-**n**) ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

≤[**k**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**k**) - (**n**-**k**)) = (**m**-**n**)
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[**k**,**n**] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**k**) - (**n**-**k**)) = (**m**-**n**))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k (≤[k,n] & ≤[n,m] ⇒ ((m-k) - (n-k)) = (m-n))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **62.** P62 appears here (instead of after P40) because it appeals to P52. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 4 (𝕋E: C1.7,3) ¡

(≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**]
⇒ (((**k**+**n**)-**m**) + (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**)-**n**))
,! 5 (∀E: P52;
(**k**+**n**): C1.7,4) ¡

≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ (((k+n)-m) + (m-n)) = ((k+n)-n)
,! 6 (()E: 5) ¡

(((k+n)-m) + (m-n)) = ((k+n)-n) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

(ω[k] & ω[n] ⇒ ((k+n)-n) = k) ,! 8 (∀E: P35) ¡

ω[k] & ω[n] ⇒ ((k+n)-n) = k ,! 9 (()E: 8) ¡

((k+n)-n) = k ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(((k+n)-m) + (m-n)) = k ,! 11 (=E: 7,10) ¡

≤[n,m] ,! 12 (&E: 2) ¡

((((k+n)-m) + (m-n)) = k ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n)-m))
,! 13 (∀E: P8;
((k+n)-m): C5.7,3;
(m-n): C5.7,12) ¡

(((k+n)-m) + (m-n)) = k ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n)-m)
,! 14 (()E: 13) ¡

(k - (m-n)) = ((k+n)-m) ,! 15 (⇒E: 11,14) ¡

≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m)
,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m))
,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀k (≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m))
! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **63.** P63 appears here because it appeals to P48. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ((m-n) - k) = (m - (n+k))) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[k,(m-n)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[n]) ,! 4 (∀E: C3.6) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[n] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[n] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[k,(m-n)] & ω[n] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[k,(m-n)] & ω[n] ⇒ (((m-n)-k) + (n+k)) = ((m-n)+n))

,! 8 (∀E: P48;
(**m**-**n**): C5.7,3) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] & ω[**n**] ⇒ (((**m**-**n**)-**k**) + (**n**+**k**)) = ((**m**-**n**)+**n**)
,! 9 (()E: 8) ¡

(((**m**-**n**)-**k**) + (**n**+**k**)) = ((**m**-**n**)+**n**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**)+**n**) = **m**) ,! 11 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**)+**n**) = **m** ,! 12 (()E: 11) ¡

((**m**-**n**)+**n**) = **m** ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

(((**m**-**n**)-**k**) + (**n**+**k**)) = **m** ,! 14 (=E: 10,13) ¡

ω[((**m**-**n**)-**k**)] & ω[(**n**+**k**)] ,! 15 (𝕋E: C1.7,14) ¡

ω[(**n**+**k**)] ,! 16 (&E: 15) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 17 (𝕋E: C1.7,16) ¡

((((**m**-**n**)-**k**) + (**n**+**k**)) = **m** ⇒ (**m** - (**n**+**k**)) = ((**m**-**n**)-**k**))
,! 18 (∀E: P8;
((**m**-**n**)-**k**): C5.7,2;
(**n**+**k**): C1.7,17) ¡

(((**m**-**n**)-**k**) + (**n**+**k**)) = **m** ⇒ (**m** - (**n**+**k**)) = ((**m**-**n**)-**k**)
,! 19 (()E: 18) ¡

(**m** - (**n**+**k**)) = ((**m**-**n**)-**k**) ,! 20 (⇒E: 14,19) ¡

(**m** - (**n**+**k**)) = (**m** - (**n**+**k**)) ,! 21 (=E: 20,20) ¡

((**m**-**n**)-**k**) = (**m** - (**n**+**k**)) ,! 22 (=E: 20,21) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ((**m**-**n**)-**k**) = (**m** - (**n**+**k**)) ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ((**m**-**n**)-**k**) = (**m** - (**n**+**k**)))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ((m-n) - k) = (m - (n+k)))
! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! P64 through P71 are various equalities involving subtraction and four variables. ¡

! **64.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ω[a] & ω[b]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = (((a+b)+c) - d)) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ω[(**a**+**b**)]) ,! 5 (∀E: C1.8) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ω[(**a**+**b**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(**a**+**b**)] ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[(**a**+**b**)] ,! 8 (&I: 3,7) ¡

(≤[**d**,**c**] & ω[(**a**+**b**)] ⇒ (((**a**+**b**)+**c**) - **d**) = ((**a**+**b**) + (**c**-**d**)))
,! 9 (∀E: P39;
(**a**+**b**): C1.7,4) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[(**a**+**b**)] ⇒ (((**a**+**b**)+**c**) - **d**) = ((**a**+**b**) + (**c**-**d**))
,! 10 (()E: 9) ¡

(((**a**+**b**)+**c**) - **d**) = ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) ,! 12 (=E: 11,11) ¡

((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**) ,! 13 (=E: 11,12) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**)
,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**))
,! 15 (()I: 14) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ω[a] & ω[b]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = (((a+b)+c) - d))
! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **65.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ω[a] & ω[b]
⇒ ((c-d)+(a+b)) = (((c+a)+b) - d)) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**))
,! 5 (∀E: P64) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**)
,! 6 (()E: 5) ¡

((a+b)+(c-d)) = (((a+b)+c) - d) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

ω[(a+b)] & ω[(c-d)] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

(ω[(a+b)] & ω[(c-d)] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((c-d)+(a+b)))
,! 9 (∀E: C2.5) ¡

ω[(a+b)] & ω[(c-d)] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((c-d)+(a+b))
,! 10 (()E: 9) ¡

((a+b)+(c-d)) = ((c-d)+(a+b)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((c-d)+(a+b)) = (((a+b)+c) - d) ,! 12 (=E: 7,11) ¡

(≤[d,c] ⇒ ω[c]) ,! 13 (∀E: C1.8) ¡

≤[d,c] ⇒ ω[c] ,! 14 (()E: 13) ¡

ω[c] ,! 15 (⇒E: 3,14) ¡

ω[a] & ω[b] & ω[c] ,! 16 (&I: 4,15) ¡

(ω[a] & ω[b] & ω[c] ⇒ ((a+b)+c) = ((a+c)+b))
,! 17 (∀E: C2.19) ¡

ω[a] & ω[b] & ω[c] ⇒ ((a+b)+c) = ((a+c)+b)
,! 18 (()E: 17) ¡

((a+b)+c) = ((a+c)+b) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

ω[a] ,! 20 (&E: 2) ¡

ω[a] & ω[c] ,! 21 (&I: 15,20) ¡

(ω[a] & ω[c] ⇒ (a+c) = (c+a)) ,! 22 (∀E: C2.5) ¡

ω[a] & ω[c] ⇒ (a+c) = (c+a) ,! 23 (()E: 22) ¡

(a+c) = (c+a) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

((a+b)+c) = ((c+a)+b) ,! 25 (=E: 19,24) ¡

((c-d)+(a+b)) = (((c+a)+b) - d) ,! 26 (=E: 12,25) ¡

≤[d,c] & ω[a] & ω[b] ⇒ ((c-d)+(a+b)) = (((c+a)+b) - d)
,! 27 (⇒I: 2,26) ¡

(≤[d,c] & ω[a] & ω[b] ⇒ ((c-d)+(a+b)) = (((c+a)+b) - d))
,! 28 (()I: 27) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ω[a] & ω[b]
⇒ ((c-d)+(a+b)) = (((c+a)+b) - d))
! 29 (∀I: 1,28) ¡

▯

! **66.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ≤[d,a] & ω[b]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((a-d)+(b+c))) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] & ≤[**d**,**a**] & ω[**b**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**d**,**a**] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[**b**] ,! 5 (&E: 2) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**b**] ,! 6 (&I: 3,5) ¡

(≤[**d**,**a**] ⇒ ω[**a**]) ,! 7 (∀E: C3.7) ¡

≤[**d**,**a**] ⇒ ω[**a**] ,! 8 (()E: 7) ¡

ω[**a**] ,! 9 (⇒E: 4,8) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ,! 10 (&I: 6,9) ¡

(≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**]
⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**))
,! 11 (∀E: P64) ¡

≤[**d**,**c**] & ω[**a**] & ω[**b**] ⇒ ((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**)
,! 12 (()E: 11) ¡

((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[**d**,**a**] & ω[**b**] ,! 14 (&I: 4,5) ¡

(≤[**d**,**c**] ⇒ ω[**c**]) ,! 15 (∀E: C3.7) ¡

≤[**d**,**c**] ⇒ ω[**c**] ,! 16 (()E: 15) ¡

ω[**c**] ,! 17 (⇒E: 3,16) ¡

≤[**d**,**a**] & ω[**b**] & ω[**c**] ,! 18 (&I: 14,17) ¡

(≤[**d**,**a**] & ω[**b**] & ω[**c**] ⇒ ((**a**-**d**)+(**b**+**c**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**))
,! 19 (∀E: P65) ¡

≤[**d**,**a**] & ω[**b**] & ω[**c**] ⇒ ((**a**-**d**)+(**b**+**c**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**)
,! 20 (()E: 19) ¡

((**a**-**d**)+(**b**+**c**)) = (((**a**+**b**)+**c**) - **d**) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

((**a**+**b**)+(**c**-**d**)) = ((**a**-**d**)+(**b**+**c**)) ,! 22 (=E: 13,21) ¡

≤[d,c] & ≤[d,a] & ω[b] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((a-d)+(b+c))
,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(≤[d,c] & ≤[d,a] & ω[b] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((a-d)+(b+c)))
,! 24 (()I: 23) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ≤[d,a] & ω[b]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((a-d)+(b+c)))
! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **67.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c))) ¡

a,b,c,d ,! 1 (Prem) ¡

≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a] ⇒ ((b+a)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c)))
,! 3 (∀E: P66) ¡

≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a] ⇒ ((b+a)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c))
,! 4 (()E: 3) ¡

((b+a)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(b+a)] & ω[(c-d)] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

ω[(b+a)] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[b] & ω[a] ,! 8 (𝕋E: C1.7,7) ¡

(ω[b] & ω[a] ⇒ (b+a) = (a+b)) ,! 9 (∀E: C2.5) ¡

ω[b] & ω[a] ⇒ (b+a) = (a+b) ,! 10 (()E: 9) ¡

(b+a) = (a+b) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

((a+b)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c)) ,! 12 (=E: 5,11) ¡

≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c))
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a] ⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c)))
,! 14 (()I: 13) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[d,c] & ≤[d,b] & ω[a]
⇒ ((a+b)+(c-d)) = ((b-d)+(a+c)))
! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **68.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a+c)-(b+d))) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**a**] & ≤[**d**,**c**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**b**,**a**] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**d**,**c**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**b**,**a**] ⇒ ω[(**a**-**b**)]) ,! 5 (∀E: C5.8) ¡

≤[**b**,**a**] ⇒ ω[(**a**-**b**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(**a**-**b**)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[**d**,**c**] ⇒ ω[(**c**-**d**)]) ,! 8 (∀E: C5.8) ¡

≤[**d**,**c**] ⇒ ω[(**c**-**d**)] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[(**c**-**d**)] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[(**a**-**b**)] & ω[(**c**-**d**)] ,! 11 (&I: 7,10) ¡

(≤[**b**,**a**] ⇒ ω[**b**]) ,! 12 (∀E: C3.6) ¡

≤[**b**,**a**] ⇒ ω[**b**] ,! 13 (()E: 12) ¡

ω[**b**] ,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

ω[(**a**-**b**)] & ω[(**c**-**d**)] & ω[**b**] ,! 15 (&I: 11,14) ¡

(≤[**d**,**c**] ⇒ ω[**d**]) ,! 16 (∀E: C3.6) ¡

≤[**d**,**c**] ⇒ ω[**d**] ,! 17 (()E: 16) ¡

ω[**d**] ,! 18 (⇒E: 4,17) ¡

ω[(**a**-**b**)] & ω[(**c**-**d**)] & ω[**b**] & ω[**d**] ,! 19 (&I: 15,18) ¡

(ω[(**a**-**b**)] & ω[(**c**-**d**)] & ω[**b**] & ω[**d**]
⇒ (((**a**-**b**) + (**c**-**d**)) + (**b**+**d**))
= (((**a**-**b**) + **b**) + ((**c**-**d**) + **d**)))
,! 20 (∀E: C2.29;
(**a**-**b**): C5.7,3;
(**c**-**d**): C5.7,4) ¡

ω[(**a**-**b**)] & ω[(**c**-**d**)] & ω[**b**] & ω[**d**]
⇒ (((**a**-**b**) + (**c**-**d**)) + (**b**+**d**)) = (((**a**-**b**) + **b**) + ((**c**-**d**) + **d**))
,! 21 (()E: 20) ¡

(((a-b) + (c-d)) + (b+d)) = (((a-b) + b) + ((c-d) + d))
,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

(≤[b,a] ⇒ ((a-b) + b) = a) ,! 23 (∀E: P3) ¡

≤[b,a] ⇒ ((a-b) + b) = a ,! 24 (()E: 23) ¡

((a-b) + b) = a ,! 25 (⇒E: 3,24) ¡

(((a-b) + (c-d)) + (b+d)) = (a + ((c-d) + d))
,! 26 (=E: 22,25) ¡

(≤[d,c] ⇒ ((c-d) + d) = c) ,! 27 (∀E: P3) ¡

≤[d,c] ⇒ ((c-d) + d) = c ,! 28 (()E: 27) ¡

((c-d) + d) = c ,! 29 (⇒E: 4,28) ¡

(((a-b) + (c-d)) + (b+d)) = (a+c) ,! 30 (=E: 26,29) ¡

ω[b] & ω[d] ,! 31 (&I: 14,18) ¡

ω[a] & ω[c] ,! 32 (𝕋E: C1.7,30) ¡

((((a-b) + (c-d)) + (b+d)) = (a+c)
⇒ ((a+c) - (b+d)) = ((a-b) + (c-d)))
,! 33 (∀E: P8;
((a-b) + (c-d)): C1.7,11;
(b+d): C1.7,31;
(a+c): C1.7,32;) ¡

(((a-b) + (c-d)) + (b+d)) = (a+c)
⇒ ((a+c) - (b+d)) = ((a-b) + (c-d))
,! 34 (()E: 33) ¡

((a+c) - (b+d)) = ((a-b) + (c-d)) ,! 35 (⇒E: 30,34) ¡

((a-b) + (c-d)) = ((a-b) + (c-d)) ,! 36 (=E: 35,35) ¡

((a-b) + (c-d)) = ((a+c) - (b+d)) ,! 37 (=E: 35,36) ¡

≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b) + (c-d)) = ((a+c) - (b+d))
,! 38 (⇒I: 2,37) ¡

(≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b) + (c-d)) = ((a+c) - (b+d)))
,! 39 (()I: 38) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a+c)-(b+d)))
! 40 (∀I: 1,39) ¡

□

! **69.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[b,a] & ≤[d,c] & ≤[d,a] & ≤[b,c]
⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a-d)+(c-b))) ¡

a,b,c,d ,! 1 (Prem) ¡

≤[b,a] & ≤[d,c] & ≤[d,a] & ≤[b,c] ,! 2 (Prem) ¡

≤[b,a] & ≤[d,c] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[d,a] & ≤[b,c] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a+c)-(b+d)))
,! 5 (∀E: P68) ¡

≤[b,a] & ≤[d,c] ⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a+c)-(b+d))
,! 6 (()E: 5) ¡

((a-b)+(c-d)) = ((a+c)-(b+d)) ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[d,a] & ≤[b,c] ⇒ ((a-d)+(c-b)) = ((a+c)-(d+b)))
,! 8 (∀E: P68) ¡

≤[d,a] & ≤[b,c] ⇒ ((a-d)+(c-b)) = ((a+c)-(d+b))
,! 9 (()E: 8) ¡

((a-d)+(c-b)) = ((a+c)-(d+b)) ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

≤[(d+b),(a+c)] ,! 11 (𝕋E: C5.7,10) ¡

ω[d] & ω[b] ,! 12 (𝕋E: C1.7,11) ¡

(ω[d] & ω[b] ⇒ (d+b) = (b+d)) ,! 13 (∀E: C2.5) ¡

ω[d] & ω[b] ⇒ (d+b) = (b+d) ,! 14 (()E: 13) ¡

(d+b) = (b+d) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

((a-d)+(c-b)) = ((a+c)-(b+d)) ,! 16 (=E: 10,15) ¡

((a-b)+(c-d)) = ((a-d)+(c-b)) ,! 17 (=E: 7,16) ¡

≤[b,a] & ≤[d,c] & ≤[d,a] & ≤[b,c]
⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a-d)+(c-b))
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(≤[b,a] & ≤[d,c] & ≤[d,a] & ≤[b,c]
⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a-d)+(c-b)))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[b,a] & ≤[d,c] & ≤[d,a] & ≤[b,c]
⇒ ((a-b)+(c-d)) = ((a-d)+(c-b)))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **70.** ¡

⊦ ∀a∀b∀c∀d (≤[(c-d),(a+b)] ⇒ ((a+b)-(c-d)) = (((a+b)+d)-c))
¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**+**b**)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**d**,**c**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**+**b**)] & ≤[**d**,**c**] ,! 4 (&I: 2,3) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 5 (𝕋E: C1.7,4) ¡

(≤[**c**,((**a**+**b**)+**d**)] & ≤[**d**,**c**]
⇒ ((**a**+**b**) - (**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**d**) - **c**))
,! 6 (∀E: P62;
(**a**+**b**): C1.7,5) ¡

≤[**c**,((**a**+**b**)+**d**)] & ≤[**d**,**c**]
⇒ ((**a**+**b**) - (**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**d**) - **c**)
,! 7 (()E: 6) ¡

((**a**+**b**) - (**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**d**) - **c**) ,! 8 (⇒E: 4,7) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**+**b**)] ⇒ ((**a**+**b**) - (**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**d**) - **c**)
,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(≤[(**c**-**d**),(**a**+**b**)] ⇒ ((**a**+**b**) - (**c**-**d**)) = (((**a**+**b**)+**d**) - **c**))
,! 10 (()I: 9) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[(c-d),(a+b)] ⇒ ((a+b)-(c-d)) = (((a+b)+d)-c))
! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **71.** ¡

⊦ ∀a∀b∀c∀d (≤[(c+d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**c**+**d**),(**a**-**b**)] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**c**] & ω[**d**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(≤[(**c**+**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**) - (**c**+**d**)) = (**a** - (**b**+(**c**+**d**)))
,! 4 (∀E: P63;
(**c**+**d**): C1.7,3) ¡

≤[(**c**+**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**) - (**c**+**d**)) = (**a** - (**b**+(**c**+**d**))
,! 5 (()E: 4) ¡

((**a**-**b**) - (**c**+**d**)) = (**a** - (**b**+(**c**+**d**)) ,! 6 (⇒E: 2,5) ¡

≤[(**c**+**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**) - (**c**+**d**)) = (**a** - (**b**+(**c**+**d**))
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[(**c**+**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**) - (**c**+**d**)) = (**a** - (**b**+(**c**+**d**)))
,! 8 (()I: 7) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[(c+d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! P72 and P73 are the **Cancellation Laws of Subtraction**. ¡

! **72.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m-n) = (k-n) ⇒ m = k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**m**-**n**) = (**k**-**n**) ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m**) ,! 5 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 6 (()E: 5) ¡

((**m**-**n**) + **n**) = **m** ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

((**k**-**n**) + **n**) = **m** ,! 8 (=E: 2,7) ¡

(≤[**n**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) + **n**) = **k**) ,! 9 (∀E: P3) ¡

≤[**n**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) + **n**) = **k** ,! 10 (()E: 9) ¡

((**k**-**n**) + **n**) = **k** ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

m = **k** ,! 12 (=E: 8,11) ¡

(**m**-**n**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **k** ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((**m**-**n**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **k**) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k ((m-n) = (k-n) ⇒ m = k) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **73.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k ((m-n) = (m-k) ⇒ n = k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**m**-**n**) = (**m**-**k**) ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[n,m] ⇒ (m - (m-n)) = n) ,! 5 (∀E: P37) ¡

≤[n,m] ⇒ (m - (m-n)) = n ,! 6 (()E: 5) ¡

(m - (m-n)) = n ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[k,m] ⇒ (m - (m-k)) = k) ,! 8 (∀E: P37) ¡

≤[k,m] ⇒ (m - (m-k)) = k ,! 9 (()E: 8) ¡

(m - (m-k)) = k ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

(m - (m-n)) = k ,! 11 (=E: 2,10) ¡

n = k ,! 12 (=E: 7,11) ¡

(m-n) = (m-k) ⇒ n = k ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

((m-n) = (m-k) ⇒ n = k) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀k((m-n) = (m-k) ⇒ n = k) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

□

! P74 through P89 are inequalities involving subtraction. Whenever possible, we appeal to C5.7 with the appearance of an appropriate term (e.g. see P76). ¡

! **74.** ¡

⊦ ∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),m]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(**m**-**n**) = (**m**-**n**) ,! 3 (=I: C5.7,2) ¡

((**m**-**n**) = (**m**-**n**) ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**]) ,! 4 (∀E: P16; (**m**-**n**): C5.7,2) ¡

(**m**-**n**) = (**m**-**n**) ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **75.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[k,m]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**]) ,! 4 (∀E: P74) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] & ≤[(**m**-**n**),**m**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] & ≤[(**m**-**n**),**m**] ⇒ ≤[**k**,**m**]) ,! 8 (∀E: C3.20; (**m**-**n**): C5.7,3) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] & ≤[(**m**-**n**),**m**] ⇒ ≤[**k**,**m**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[**k**,**m**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[**k**,**m**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[k,m]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **76.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[m,k] & ω[n] ⇒ ≤[(k-m),(k+n)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,**k**] & ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**m**,**k**] & ω[**n**] ⇒ ((**k**+**n**) - (**k**-**m**)) = (**n**+**m**)) ,! 3 (∀E: P58) ¡

≤[**m**,**k**] & ω[**n**] ⇒ ((**k**+**n**) - (**k**-**m**)) = (**n**+**m**) ,! 4 (()E: 3) ¡

((**k**+**n**) - (**k**-**m**)) = (**n**+**m**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**k**-**m**),(**k**+**n**)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[**m**,**k**] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**k**-**m**),(**k**+**n**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**m**,**k**] & ω[**n**] ⇒ ≤[(**k**-**m**),(**k**+**n**)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[m,k] & ω[n] ⇒ ≤[(k-m),(k+n)]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **77.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ≤[(m-n),(k-n)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**))
,! 3 (∀E: P61) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ≤[(m-n),(k-n)])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **78.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ≤[(k-m),(k-n)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**))
,! 3 (∀E: P60) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**)
,! 4 (()E: 3) ¡

((**k**-**n**) - (**k**-**m**)) = (**m**-**n**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ≤[(k-m),(k-n)])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **79.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[m,k]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ,! 5 (&I: 3,4) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**))
,! 6 (∀E: P61) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**)
,! 7 (()E: 6) ¡

((**k**-**n**) - (**m**-**n**)) = (**k**-**m**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**m**,**k**] ,! 9 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ⇒ ≤[**m**,**k**] ,! 10 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ⇒ ≤[**m**,**k**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m∀k (≤[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[m,k]) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **80.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[(n+k),m]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ((**m**-**n**) - **k**) = (**m** - (**n**+**k**)))
,! 3 (∀E: P63) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ((**m**-**n**) - **k**) = (**m** - (**n**+**k**))
,! 4 (()E: 3) ¡

((**m**-**n**) - **k**) = (**m** - (**n**+**k**)) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**n**+**k**),**m**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[(n+k),m]) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **81.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[(k+n),m]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**n**+**k**),**m**]) ,! 3 (∀E: P80) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**)) ,! 7 (∀E: C2.5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[(**k**+**n**),**m**] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**k**+**n**),**m**] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[**k**,(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**k**+**n**),**m**]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[k,(m-n)] ⇒ ≤[(k+n),m]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **82.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**))
,! 3 (∀E: P62) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**)
,! 4 (()E: 3) ¡

(**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 6 (𝕋E: C5.7,5) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**]) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m∀k (≤[m,(k+n)] & ≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),k])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **83.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[m,(n+k)] & ≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),k]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**m**,(**n**+**k**)] & ≤[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**m**,(**n**+**k**)] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 4 (𝕋E: C1.7,3) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**)) ,! 5 (∀E: C2.5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 6 (()E: 5) ¡

(**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ,! 8 (=E: 2,7) ¡

(≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**]) ,! 9 (∀E: P82) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

≤[**m**,(**n**+**k**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(≤[**m**,(**n**+**k**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),**k**]) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m∀k (≤[m,(n+k)] & ≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),k])
! 14 (∀I: 1,13) ¡

□

! **84.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(n+k),m] ⇒ ≤[k,(m-n)]) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ≤[**n**,(**n**+**k**)]) ,! 4 (∀E: C3.33) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ≤[**n**,(**n**+**k**)] ,! 5 (()E: 4) ¡

≤[**n**,(**n**+**k**)] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[**n**,(**n**+**k**)] & ≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[**n**,(**n**+**k**)] & ≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[((**n**+**k**)-**n**),(**m**-**n**)])
,! 8 (∀E: P77;
(**n**+**k**): C1.7,3) ¡

≤[**n**,(**n**+**k**)] & ≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[((**n**+**k**)-**n**),(**m**-**n**)]
,! 9 (()E: 8) ¡

≤[((**n**+**k**)-**n**),(**m**-**n**)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**k**)-**n**) = **k**) ,! 11 (∀E: P36) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ ((**n**+**k**)-**n**) = **k** ,! 12 (()E: 11) ¡

((**n**+**k**)-**n**) = **k** ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 14 (=E: 10,13) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)]) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (≤[(n+k),m] ⇒ ≤[k,(m-n)]) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **85.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(k+n),m] ⇒ ≤[k,(m-n)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**k**+**n**),**m**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k**+**n**) = (**n**+**k**)) ,! 4 (∀E: C2.5) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ (**k**+**n**) = (**n**+**k**) ,! 5 (()E: 4) ¡

(**k**+**n**) = (**n**+**k**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)]) ,! 8 (∀E: P84) ¡

≤[(**n**+**k**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(**k**+**n**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**k**+**n**),**m**] ⇒ ≤[**k**,(**m**-**n**)]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[(k+n),m] ⇒ ≤[k,(m-n)]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **86.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[(m-n),k] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ω[n]) ,! 4 (∀E: C3.6) ¡

≤[n,m] ⇒ ω[n] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[n] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

≤[(m-n),k] & ω[n] ,! 7 (&I: 2,6) ¡

(≤[(m-n),k] & ω[n] ⇒ ≤[(n+(m-n)),(n+k)])
,! 8 (∀E: C3.29; (m-n): C5.7,3) ¡

≤[(m-n),k] & ω[n] ⇒ ≤[(n+(m-n)),(n+k)]
,! 9 (()E: 8) ¡

≤[(n+(m-n)),(n+k)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(≤[n,m] ⇒ (n+(m-n)) = m) ,! 11 (∀E: P4) ¡

≤[n,m] ⇒ (n+(m-n)) = m ,! 12 (()E: 11) ¡

(n+(m-n)) = m ,! 13 (⇒E: 3,12) ¡

≤[m,(n+k)] ,! 14 (=E: 10,13) ¡

≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)]) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)]) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **87.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(k+n)]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

≤[(m-n),k] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)]) ,! 3 (∀E: P86) ¡

≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(n+k)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[m,(n+k)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[n] & ω[k] ,! 6 (𝕋E: C1.7,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**)) ,! 7 (∀E: C2.5) ¡

ω[**n**] & ω[**k**] ⇒ (**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n**+**k**) = (**k**+**n**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] ,! 10 (=E: 5,9) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ ≤[**m**,(**k**+**n**)] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ ≤[**m**,(**k**+**n**)]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ ≤[m,(k+n)]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **88.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k(≤[(m-k),(m-n)] ⇒ ≤[n,k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[**k**,**m**] ⇒ ω[**k**]) ,! 5 (∀E: C3.6) ¡

≤[**k**,**m**] ⇒ ω[**k**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**k**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**]) ,! 8 (∀E: C3.6) ¡

≤[**n**,**m**] ⇒ ω[**n**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**n**] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ,! 11 (&I: 7,10) ¡

(ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**k**+**n**)]) ,! 12 (∀E: C1.8) ¡

ω[**k**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**k**+**n**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

ω[(**k**+**n**)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] & ω[(**k**+**n**)] ,! 15 (&I: 2,14) ¡

(≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] & ω[(**k**+**n**)]
⇒ ≤[((**m**-**k**) + (**k**+**n**)),((**m**-**n**) + (**k**+**n**))])
,! 16 (∀E: C3.28);
(**m**-**k**): C5.7,3;
(**m**-**n**): C5.7,4;

(k+n): C1.7,11)

≤[(m-k),(m-n)] & ω[(k+n)]
⇒ ≤[((m-k) + (k+n)),((m-n) + (k+n))] ,! 17 (()E: 16) ¡

≤[((m-k) + (k+n)),((m-n) + (k+n))] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

≤[k,m] & ω[n] ,! 19 (&I: 3,10) ¡

(≤[k,m] & ω[n] ⇒ ((m-k) + (k+n)) = (m+n)) ,! 20 (∀E: P49) ¡

≤[k,m] & ω[n] ⇒ ((m-k) + (k+n)) = (m+n) ,! 21 (()E: 20) ¡

((m-k) + (k+n)) = (m+n) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

≤[(m+n),((m-n) + (k+n))] ,! 23 (=E: 18,22) ¡

≤[n,m] & ω[k] ,! 24 (&I: 4,7) ¡

(≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k)) ,! 25 (∀E: P48) ¡

≤[n,m] & ω[k] ⇒ ((m-n) + (k+n)) = (m+k) ,! 26 (()E: 25) ¡

((m-n) + (k+n)) = (m+k) ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

≤[(m+n),(m+k)] ,! 28 (=E: 23,27) ¡

(≤[(m+n),(m+k)] ⇒ ≤[n,k]) ,! 29 (∀E: C3.43) ¡

≤[(m+n),(m+k)] ⇒ ≤[n,k] ,! 30 (()E: 29) ¡

≤[n,k] ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

≤[(m-k),(m-n)] ⇒ ≤[n,k] ,! 32 (⇒I: 2,31) ¡

(≤[(m-k),(m-n)] ⇒ ≤[n,k]) ,! 33 (()I: 32) ¡

∀n∀m∀k(≤[(m-k),(m-n)] ⇒ ≤[n,k]) ! 34 (∀I: 1,33) ¡

□

! **89.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k∀j (≤[n,j] & ≤[j,k] & ≤[k,m] ⇒ ≤[(k-j),(m-n)]) ¡

n,m,k,j ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,j] & ≤[j,k] & ≤[k,m] ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,j] & ≤[j,k] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[**k**,**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)]) ,! 5 (∀E: P78) ¡

≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] ⇒ ≤[**n**,**k**]) ,! 8 (∀E: C3.20) ¡

≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] ⇒ ≤[**n**,**k**] ,! 9 (()E: 8) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 10 (⇒E: 3,9) ¡

≤[**n**,**k**] & ≤[**k**,**m**] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

(≤[**n**,**k**] & ≤[**k**,**m**] ⇒ ≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)]) ,! 12 (∀E: P77) ¡

≤[**n**,**k**] & ≤[**k**,**m**] ⇒ ≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)] & ≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)] ,! 15 (&I: 7,14) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 16 (𝕋E: C5.7,14) ¡

≤[**j**,**k**] ,! 17 (&E: 3) ¡

(≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)] & ≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**m**-**n**)])
,! 18 (∀E: C3.20;
(**k**-**j**): C5.7,17;
(**k**-**n**): C5.7,10;
(**m**-**n**): C5.7,16) ¡

≤[(**k**-**j**),(**k**-**n**)] & ≤[(**k**-**n**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**m**-**n**)]
,! 19 (()E: 18) ¡

≤[(**k**-**j**),(**m**-**n**)] ,! 20 (⇒E: 15,19) ¡

≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] & ≤[**k**,**m**] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**m**-**n**)]
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[**n**,**j**] & ≤[**j**,**k**] & ≤[**k**,**m**] ⇒ ≤[(**k**-**j**),(**m**-**n**)])
,! 22 (()I: 21) ¡

∀n∀m∀k∀j (≤[n,j] & ≤[j,k] & ≤[k,m] ⇒ ≤[(k-j),(m-n)])
! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! The equalities P90 through P93 appear here because they appeal to propositions involving inequalities. ¡

! **90.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m)) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ ≤[**m**,(**k**+**n**)]) ,! 3 (∀E P87) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ ≤[**m**,(**k**+**n**)] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 6 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ,! 7 (&I: 5,6) ¡

(≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**))
,! 8 (∀E: P62) ¡

≤[**m**,(**k**+**n**)] & ≤[**n**,**m**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**)
,! 9 (()E: 8) ¡

(**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**),! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(≤[(**m**-**n**),**k**] ⇒ (**k** - (**m**-**n**)) = ((**k**+**n**) - **m**))
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m∀k (≤[(m-n),k] ⇒ (k - (m-n)) = ((k+n) - m))
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **91.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[((b+c)+d),a] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[((**b**+**c**)+**d**),**a**] ,! 2 (Prem) ¡

ω[(**b**+**c**)] & ω[**d**] ,! 3 (𝕋E: C1.7,2) ¡

ω[(**b**+**c**)] ,! 4 (&E: 3) ¡

ω[**d**] ,! 5 (&E: 3) ¡

ω[**b**] & ω[**c**] ,! 6 (𝕋E: C1.7,4) ¡

ω[**b**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[**c**] ,! 8 (&E: 6) ¡

ω[**c**] & ω[**d**] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

ω[**c**] & ω[**d**] & ω[**b**] ,! 10 (&I: 7,9) ¡

(ω[c] & ω[d] & ω[b] ⇒ ((c+d)+b) = ((b+c)+d))
,! 11 (∀E: C2.25) ¡

ω[c] & ω[d] & ω[b] ⇒ ((c+d)+b) = ((b+c)+d)
,! 12 (()E: 11) ¡

((c+d)+b) = ((b+c)+d) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

≤[((c+d)+b),a] ,! 14 (=E: 2,13) ¡

(≤[((c+d)+b),a] ⇒ ≤[(c+d),(a-b)]) ,! 15 (∀E: P85; (c+d): C1.7,9) ¡

≤[((c+d)+b),a] ⇒ ≤[(c+d),(a-b)] ,! 16 (()E: 15) ¡

≤[(c+d),(a-b)] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(≤[(c+d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
,! 18 (∀E: P71) ¡

≤[(c+d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d))
,! 19 (()E: 18) ¡

((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)) ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

≤[((b+c)+d),a] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d))
,! 21 (⇒I: 2,20) ¡

(≤[((b+c)+d),a] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
,! 22 (()I: 21) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[((b+c)+d),a] ⇒ ((a-b)-(c+d)) = (a-((b+c)+d)))
,! 23 (∀I: 1,22) ¡

▯

! 92. ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[(c-d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a+d)-(b+c)))
¡

a,b,c,d ,! 1 (Prem) ¡

≤[(c-d),(a-b)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[d,c] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[b,a] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(≤[d,c] ⇒ ≤[(c-d),c]) ,! 5 (∀E: P74) ¡

≤[d,c] ⇒ ≤[(c-d),c] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(c-d),c] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

≤[(c-d),c] & ≤[(c-d),(a-b)] ,! 8 (&I: 2,7) ¡

(≤[b,a] ⇒ ω[b]) ,! 9 (∀E: C3.6) ¡

≤[b,a] ⇒ ω[b] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[b] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

≤[(c-d),c] & ≤[(c-d),(a-b)] & ω[b] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

(≤[(c-d),c] & ≤[(c-d),(a-b)] & ω[b]
⇒ (((a-b)+b) + (c-(c-d))) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c)))
,! 13 (∀E: P66;
(c-d): C5.7,3;
(a-b): C5.7,3) ¡

≤[(c-d),c] & ≤[(c-d),(a-b)] & ω[b]
⇒ (((a-b)+b) + (c-(c-d))) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c))
,! 14 (()E: 13) ¡

(((a-b)+b) + (c-(c-d))) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c))
,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

(≤[b,a] ⇒ ((a-b)+b) = a) ,! 16 (∀E: P3) ¡

≤[b,a] ⇒ ((a-b)+b) = a ,! 17 (()E: 16) ¡

((a-b)+b) = a ,! 18 (⇒E: 4,17) ¡

(a+(c-(c-d))) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c))
,! 19 (=E: 15,18) ¡

(≤[d,c] ⇒ (c-(c-d)) = d) ,! 20 (∀E: P37) ¡

≤[d,c] ⇒ (c-(c-d)) = d ,! 21 (()E: 20) ¡

(c-(c-d)) = d ,! 22 (⇒E: 3,21) ¡

(a+d) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c)) ,! 23 (=E: 19,22) ¡

ω[((a-b)-(c-d))] & ω[(b+c)] ,! 24 (𝕋E: C1.7,23) ¡

ω[(b+c)] ,! 25 (&E: 24) ¡

ω[b] & ω[c] ,! 26 (𝕋E: C1.7,25) ¡

ω[a] & ω[d] ,! 27 (𝕋E: C1.7,23) ¡

((a+d) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c))
⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a+d)-(b+c)))
,! 28 (∀E: P14;
(a+d): C1.7,27;
((a-b)-(c-d)): C5.7,2;
(b+c): C1.7,26) ¡

(a+d) = (((a-b)-(c-d)) + (b+c))

⇒ ((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**))
,! 29 (()E: 28) ¡

((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**)) ,! 30 (⇒E: 23,29) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**))
,! 31 (⇒I: 2,30) ¡

(≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**)))
,! 32 (()I: 31) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[(c-d),(a-b)] ⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a+d)-(b+c)))
! 33 (∀I: 1,32) ¡

□

! **93.** ¡

⊢ ∀a∀b∀c∀d (≤[b,d] & ≤[d,c] & ≤[c,a]
⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a-c)+(d-b))) ¡

a,**b**,**c**,**d** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**b**,**d**] & ≤[**d**,**c**] & ≤[**c**,**a**] ,! 2 (Prem) ¡

(≤[**b**,**d**] & ≤[**d**,**c**] & ≤[**c**,**a**] ⇒ ≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)])
,! 3 (∀E: P89) ¡

≤[**b**,**d**] & ≤[**d**,**c**] & ≤[**c**,**a**] ⇒ ≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)]
,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**)))
,! 6 (∀E: P92) ¡

≤[(**c**-**d**),(**a**-**b**)] ⇒ ((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**))
,! 7 (()E: 6) ¡

((**a**-**b**)-(**c**-**d**)) = ((**a**+**d**)-(**b**+**c**)) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

≤[**b**,**d**] ,! 9 (&E: 2) ¡

≤[**c**,**a**] ,! 10 (&E: 2) ¡

≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**d**] ,! 11 (&I: 9,10) ¡

(≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**d**] ⇒ ((**a**-**c**)+(**d**-**b**)) = ((**a**+**d**)-(**c**+**b**)))
,! 12 (∀E: P68) ¡

≤[**c**,**a**] & ≤[**b**,**d**] ⇒ ((**a**-**c**)+(**d**-**b**)) = ((**a**+**d**)-(**c**+**b**))
,! 13 (()E: 12) ¡

((**a**-**c**)+(**d**-**b**)) = ((**a**+**d**)-(**c**+**b**)) ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(**c**+**b**),(**a**+**d**)] ,! 15 (𝕋E: C5.7,14) ¡

ω[c] & ω[b] ,! 16 (𝕋E: C1.7,15) ¡

(ω[c] & ω[b] ⇒ (c+b) = (b+c)) ,! 17 (∀E: C2.5) ¡

ω[c] & ω[b] ⇒ (c+b) = (b+c) ,! 18 (()E: 17) ¡

(c+b) = (b+c) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

((a-c)+(d-b)) = ((a+d)-(b+c)) ,! 20 (=E: 14,19) ¡

((a-b)-(c-d)) = ((a-c)+(d-b)) ,! 21 (=E: 8,20) ¡

≤[b,d] & ≤[d,c] & ≤[c,a] ⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a-c)+(d-b))
,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(≤[b,d] & ≤[d,c] & ≤[c,a] ⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a-c)+(d-b)))
,! 23 (()I: 22) ¡

∀a∀b∀c∀d (≤[b,d] & ≤[d,c] & ≤[c,a]
⇒ ((a-b)-(c-d)) = ((a-c)+(d-b)))
! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! P94 through P99 involve strict inequalities. ¡

! **94.** ¡

⊢ ∀n∀m (≤[n,m] & ¬ n = 0 ⇒ <[(m-n),m]) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

≤[n,m] & ¬ n = 0 ,! 2 (Prem) ¡

≤[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ n = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),m]) ,! 5 (∀E: P74) ¡

≤[n,m] ⇒ ≤[(m-n),m] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(m-n),m] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

(m-n) = m ,! 8 (Prem) ¡

((m-n) = m ⇒ n = 0) ,! 9 (∀E: P29) ¡

(m-n) = m ⇒ n = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

n = 0 ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

ℑ ,! 12 (ℑI: 4,11) ¡

(m-n) = m ⇒ ℑ ,! 13 (⇒I: 8,12) ¡

¬ (**m**-**n**) = **m** ,! 14 (¬I: 13) ¡

≤[(**m**-**n**),**m**] & ¬ (**m**-**n**) = **m** ,! 15 (&I: 7,14) ¡

(≤[(**m**-**n**),**m**] & ¬ (**m**-**n**) = **m** ⇒ <[(**m**-**n**),**m**])
,! 16 (∀E: C4.4; (**m**-**n**): C5.7,3) ¡

≤[(**m**-**n**),**m**] & ¬ (**m**-**n**) = **m** ⇒ <[(**m**-**n**),**m**]
,! 17 (()E: 16) ¡

<[(**m**-**n**),**m**] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ <[(**m**-**n**),**m**] ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(≤[**n**,**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ <[(**m**-**n**),**m**]) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m (≤[n,m] & ¬ n = 0 ⇒ <[(m-n),m]) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **95.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (≤[n,m] & <[m,k] ⇒ <[(m-n),(k-n)]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] & <[**m**,**k**] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

<[**m**,**k**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(<[**m**,**k**] ⇒ ≤[**m**,**k**] & ¬ **m** = **k**) ,! 5 (∀E: C4.3) ¡

<[**m**,**k**] ⇒ ≤[**m**,**k**] & ¬ **m** = **k** ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[**m**,**k**] & ¬ **m** = **k** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

≤[**m**,**k**] ,! 8 (&E: 7) ¡

¬ **m** = **k** ,! 9 (&E: 7) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ,! 10 (&I: 3,8) ¡

(≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)]) ,! 11 (∀E: P77) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 12 (()E: 11) ¡

≤[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**m**-**n**) = (**k**-**n**) ,! 14 (Prem) ¡

((**m**-**n**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **k**) ,! 15 (∀E: P72) ¡

(**m**-**n**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **k** ,! 16 (()E: 15) ¡

m = k ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

𝔉 ,! 18 (𝔉I: 9,17) ¡

(m-n) = (k-n) ⇒ 𝔉 ,! 19 (⇒I: 14,18) ¡

¬ (m-n) = (k-n) ,! 20 (¬I: 19) ¡

≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n) ,! 21 (&I: 13,20) ¡

≤[n,k] ,! 22 (𝕋E: C5.7,13) ¡

(≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n) ⇒ <[(m-n),(k-n)])
,! 23 (∀E: C4.4;
(m-n): C5.7,3;
(k-n): C5.7,22) ¡

≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n) ⇒ <[(m-n),(k-n)]
,! 24 (()E: 23) ¡

<[(m-n),(k-n)] ,! 25 (⇒E: 21,24) ¡

≤[n,m] & <[m,k] ⇒ <[(m-n),(k-n)] ,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(≤[n,m] & <[m,k] ⇒ <[(m-n),(k-n)]) ,! 27 (()I: 26) ¡

∀n∀m∀k (≤[n,m] & <[m,k] ⇒ <[(m-n),(k-n)])
! 28 (∀I: 1,27) ¡

□

! **96.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[n,m] & ≤[m,k] ⇒ <[(k-m),(k-n)]) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

<[n,m] & ≤[m,k] ,! 2 (Prem) ¡

<[n,m] ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[m,k] ,! 4 (&E: 2) ¡

(<[n,m] ⇒ ≤[n,m] & ¬ n = m) ,! 5 (∀E: C4.3) ¡

<[n,m] ⇒ ≤[n,m] & ¬ n = m ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[n,m] & ¬ n = m ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

≤[n,m] ,! 8 (&E: 7) ¡

¬ n = m ,! 9 (&E: 7) ¡

≤[n,m] & ≤[m,k] ,! 10 (&E: 4,8) ¡

(≤[n,m] & ≤[m,k] ⇒ ≤[(k-m),(k-n)]) ,! 11 (∀E: P78) ¡

≤[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ ≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 12 (()E: 11) ¡

≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

(**k**-**m**) = (**k**-**n**) ,! 14 (Prem) ¡

((**k**-**m**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **n**) ,! 15 (∀E: P73) ¡

(**k**-**m**) = (**k**-**n**) ⇒ **m** = **n** ,! 16 (()E: 15) ¡

m = **n** ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

n = **n** ,! 18 (=I) ¡

n = **m** ,! 19 (=E: 17,18) ¡

𝔉 ,! 20 (𝔉I: 9,19) ¡

(**k**-**m**) = (**k**-**n**) ⇒ 𝔉 ,! 21 (⇒I: 14,20) ¡

¬ (**k**-**m**) = (**k**-**n**) ,! 22 (¬I: 21) ¡

≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] & ¬ (**k**-**m**) = (**k**-**n**) ,! 23 (&I: 13,22) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 24 (𝕋E: C5.7,13) ¡

(≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] & ¬ (**k**-**m**) = (**k**-**n**) ⇒ <[(**k**-**m**),(**k**-**n**)])
,! 25 (∀E: C4.4;
(**k**-**m**): C5.7,4;
(**k**-**n**): C5.7,24) ¡

≤[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] & ¬ (**k**-**m**) = (**k**-**n**) ⇒ <[(**k**-**m**),(**k**-**n**)]
,! 26 (()E: 25) ¡

<[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 27 (⇒E: 23,26) ¡

<[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ <[(**k**-**m**),(**k**-**n**)] ,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(<[**n**,**m**] & ≤[**m**,**k**] ⇒ <[(**k**-**m**),(**k**-**n**)]) ,! 29 (()I: 28) ¡

∀n∀m∀k (<[n,m] & ≤[m,k] ⇒ <[(k-m),(k-n)])
! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! **97.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[(m-n),(k-n)] ⇒ <[m,k]) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

<[(**m**-**n**),(**k**-**n**)] ,! 2 (Prem) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(<[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n)) ,! 5 (∀E: C4.3; (m-n): C5.7,3; (k-n): C5.7,4) ¡

<[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n) ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(m-n),(k-n)] & ¬ (m-n) = (k-n) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

≤[(m-n),(k-n)] ,! 8 (&E: 7) ¡

¬ (m-n) = (k-n) ,! 9 (&E: 7) ¡

(≤[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[m,k]) ,! 10 (∀E: P79) ¡

≤[(m-n),(k-n)] ⇒ ≤[m,k] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[m,k] ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

m = k ,! 13 (Prem) ¡

(m-n) = (m-n) ,! 14 (=I; (m-n): C5.7,3) ¡

(m-n) = (k-n) ,! 15 (=E: 13,14) ¡

𝔉 ,! 16 (𝔉I: 9,15) ¡

m = k ⇒ 𝔉 ,! 17 (⇒I: 13,16) ¡

¬ m = k ,! 18 (¬I: 17) ¡

≤[m,k] & ¬ m = k ,! 19 (&I: 12,18) ¡

(≤[m,k] & ¬ m = k ⇒ <[m,k]) ,! 20 (∀E: C4.4) ¡

≤[m,k] & ¬ m = k ⇒ <[m,k] ,! 21 (()E: 20) ¡

<[m,k] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

<[(m-n),(k-n)] ⇒ <[m,k] ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(<[(m-n),(k-n)] ⇒ <[m,k]) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m∀k (<[(m-n),(k-n)] ⇒ <[m,k]) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **98.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (<[(m-k),(m-n)] ⇒ <[n,k]) ¡

n,m,k ,! (Prem) ¡

<[(m-k),(m-n)] ,! (Prem) ¡

≤[k,m] ,! 3 (𝕋E: C5.7,2) ¡

≤[**n**,**m**] ,! 4 (𝕋E: C5.7,2) ¡

(<[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] & ¬ (**m**-**k**) = (**m**-**n**)) ,! 5 (∀E: C4.3; (**m**-**k**): C5.7,3; (**m**-**n**): C5.7,4) ¡

<[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] & ¬ (**m**-**k**) = (**m**-**n**) ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] & ¬ (**m**-**k**) = (**m**-**n**) ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ,! 8 (&E: 7) ¡

¬ (**m**-**k**) = (**m**-**n**) ,! 9 (&E: 7) ¡

(≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[**n**,**k**]) ,! 10 (∀E: P88) ¡

≤[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ ≤[**n**,**k**] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[**n**,**k**] ,! 12 (⇒E: 8,11) ¡

n = **k** ,! 13 (Prem) ¡

(**m**-**k**) = (**m**-**k**) ,! 14 (=I; (**m**-**k**): C5.7,3) ¡

(**m**-**k**) = (**m**-**m**) ,! 15 (=E: 13,14) ¡

𝔉 ,! 16 (𝔉I: 9,15) ¡

n = **k** ⇒ 𝔉 ,! 17 (⇒I: 13,16) ¡

¬ **n** = **k** ,! 18 (¬I: 17) ¡

≤[**n**,**k**] & ¬ **n** = **k** ,! 19 (&I: 12,18) ¡

(≤[**n**,**k**] & ¬ **n** = **k** ⇒ <[**n**,**k**]) ,! 20 (∀E: C4.4) ¡

≤[**n**,**k**] & ¬ **n** = **k** ⇒ <[**n**,**k**] ,! 21 (()E: 20) ¡

<[**n**,**k**] ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

<[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ <[**n**,**k**] ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(<[(**m**-**k**),(**m**-**n**)] ⇒ <[**n**,**k**]) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m∀k (<[(m-k),(m-n)] ⇒ <[n,k]) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **99.** ¡

⊢ ∀n∀m (<[n,m] ⇒ ≤[1,(m-n)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

<[**n**,**m**] ,! 2 (Prem) ¡

(<[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**n**+1),**m**]) ,! 3 (∀E: C4.36) ¡

<[**n**,**m**] ⇒ ≤[(**n**+1),**m**] ,! 4 (()E: 3) ¡

≤[(**n**+1),**m**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(≤[(**n**+1),**m**] ⇒ ≤[1,(**m**-**n**)]) ,! 6 (∀E: P84) ¡

<[**n**,**m**] ⇒ ≤[1,(**m**-**n**)] ,! 7 (()E: 6) ¡

≤[1,(**m**-**n**)] ,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

<[**n**,**m**] ⇒ ≤[1,(**m**-**n**)] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(<[**n**,**m**] ⇒ ≤[1,(**m**-**n**)]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (<[n,m] ⇒ ≤[1,(m-n)]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯