

! CHAPTER 9

INFINITE INTERVALS ;

! This chapter develops, very quickly, the notion of intervals of finite numbers greater than or equal to some specified finite number. i

! 1. i

$\mathbb{D} \infty ; (\mathbf{b} \infty) ; ; \{a : \leq[\mathbf{b}, a]\}$  i

! 2. i

$\vdash \forall \mathbf{b} \forall \mathbf{x} ( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  i

$\mathbf{b}$  , ! 1 (Prem) i

$\forall \mathbf{x} ( \{a : \leq[\mathbf{b}, a]\}[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  , ! 2 (Pred) i

$\forall \mathbf{x} ( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  , ! 3 ( $\mathbb{D}I$ : P1,2) i

$\forall \mathbf{b} \forall \mathbf{x} ( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  ! 4 ( $\forall I$ : 1,3) i

□

! 3. i

$\vdash \forall \mathbf{b} \forall \mathbf{x} ( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  i

$\mathbf{b}, \mathbf{x}$  , ! 1 (Prem) i

$( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  , ! 2 ( $\forall E$ : P2) i

$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}]$  , ! 3 ( $(())E$ : 2) i

$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}]$  , ! 4 ( $\Leftrightarrow E$ : 3) i

$( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  , ! 5 ( $(())I$ : 4) i

$\forall \mathbf{b} \forall \mathbf{x} ( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  ! 6 ( $\forall I$ : 1,5) i

□

! 4. i

$\vdash \forall \mathbf{b} \forall \mathbf{x} ( \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] )$  i

$\mathbf{b}, \mathbf{x}$  , ! 1 (Prem) i

$( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] )$  , ! 2 ( $\forall E$ : P2) i

$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}]$  , ! 3 ( $(())E$ : 2) i

$\leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}]$  , ! 4 ( $\Leftrightarrow E$ : 3) i

$( \leq[\mathbf{b}, \mathbf{x}] \Rightarrow (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{x}] )$  , ! 5 ( $(())I$ : 4) i

$\forall b \forall x ( \leq[b, x] \Rightarrow (b \infty)[x] )$  ! 6 ( $\forall I$ : 1,5) i

□

! 5. i

$\vdash \forall b \forall x ( <[x, b] \Rightarrow \neg (b \infty)[x] )$  i

**b, x** ,! 1 (Prem) i

$<[x, b]$  ,! 2 (Prem) i

$(b \infty)[x]$  ,! 3 (Prem) i

$( (b \infty)[x] \Rightarrow \leq[b, x] )$  ,! 4 ( $\forall E$ : P3) i

$(b \infty)[x] \Rightarrow \leq[b, x]$  ,! 5 ( $(\Rightarrow)E$ : 4) i

$\leq[b, x]$  ,! 6 ( $\Rightarrow E$ : 3,5) i

$<[x, b] \ \& \ \leq[b, x]$  ,! 7 ( $\&I$ : 2,6) i

$( <[x, b] \ \& \ \leq[b, x] \Rightarrow \mathcal{F} )$  ,! 8 ( $\forall E$ : C4.19) i

$<[x, b] \ \& \ \leq[b, x] \Rightarrow \mathcal{F}$  ,! 9 ( $(\Rightarrow)E$ : 8) i

$\mathcal{F}$  ,! 10 ( $\Rightarrow E$ : 7,9) i

$(b \infty)[x] \Rightarrow \mathcal{F}$  ,! 11 ( $\Rightarrow I$ : 3,10) i

$\neg (b \infty)[x]$  ,! 12 ( $\neg I$ : 11) i

$<[x, b] \Rightarrow \neg (b \infty)[x]$  ,! 13 ( $\Rightarrow I$ : 2,12) i

$( <[x, b] \Rightarrow \neg (b \infty)[x] )$  ,! 14 ( $(\Rightarrow)I$ : 13) i

$\forall b \forall x ( <[x, b] \Rightarrow \neg (b \infty)[x] )$  ! 15 ( $\forall I$ : 1,14) i

□

! 6. i

$\vdash \forall b ( \omega[b] \Rightarrow \neg (b \infty) \equiv \phi )$  i

**b** ,! 1 (Prem) i

$\omega[b]$  ,! 2 (Prem) i

$( \omega[b] \Rightarrow \leq[b, b] )$  ,! 3 ( $\forall E$ : C3.23) i

$\omega[b] \Rightarrow \leq[b, b]$  ,! 4 ( $(\Rightarrow)E$ : 3) i

$\leq[b, b]$  ,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4) i

$( \leq[b, b] \Rightarrow (b \infty)[b] )$  ,! 6 ( $\forall E$ : P4) i

$\leq[b, b] \Rightarrow (b \infty)[b]$  ,! 7 ( $(\Rightarrow)E$ : 6) i

$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{b}]$	,! 8 ( $\Rightarrow$ E: 5,7)	i
$\exists x (\mathbf{b} \infty)[x]$	,! 9 ( $\exists$ I: 8)	i
$(\exists x (\mathbf{b} \infty)[x] \Rightarrow \neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi)$	,! 10 ( $\forall$ E: II5.7)	i
$\exists x (\mathbf{b} \infty)[x] \Rightarrow \neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi$	,! 11 ( $(\ )$ E: 10)	i
$\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi$	,! 12 ( $\Rightarrow$ E: 9,11)	i
$\omega[\mathbf{b}] \Rightarrow \neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi$	,! 13 ( $\Rightarrow$ I: 2,12)	i
$(\omega[\mathbf{b}] \Rightarrow \neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi)$	,! 14 ( $(\ )$ I: 13)	i
$\forall \mathbf{b} (\omega[\mathbf{b}] \Rightarrow \neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi)$	! 15 ( $\forall$ I: 1,14)	i
$\square$		
<b>! 7.</b>		i
$\vdash \forall \mathbf{b} (\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \omega[\mathbf{b}])$		i
$\mathbf{b}$	,! 1 (Prem)	i
$\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi$	,! 2 (Prem)	i
$(\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \exists x (\mathbf{b} \infty)[x])$	,! 3 ( $\forall$ E: II5.16)	i
$\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \exists x (\mathbf{b} \infty)[x]$	,! 4 ( $(\ )$ E: 3)	i
$\exists x (\mathbf{b} \infty)[x]$	,! 5 ( $\Rightarrow$ E: 2,4)	i
$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{b}]$	,! 6 ( $\exists$ E: 5)	i
$( (\mathbf{b} \infty)[\mathbf{b}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},\mathbf{b}])$	,! 7 ( $\forall$ E: P3)	i
$(\mathbf{b} \infty)[\mathbf{b}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},\mathbf{b}]$	,! 8 ( $(\ )$ E: 7)	i
$\leq[\mathbf{b},\mathbf{b}]$	,! 9 ( $\Rightarrow$ E: 6,8)	i
$(\leq[\mathbf{b},\mathbf{b}] \Rightarrow \omega[\mathbf{b}])$	,! 10 ( $\forall$ E: C3.6)	i
$\leq[\mathbf{b},\mathbf{b}] \Rightarrow \omega[\mathbf{b}]$	,! 11 ( $(\ )$ E: 10)	i
$\omega[\mathbf{b}]$	,! 12 ( $\Rightarrow$ E: 9,11)	i
$\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \omega[\mathbf{b}]$	,! 13 ( $\Rightarrow$ I: 2,12)	i
$(\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \omega[\mathbf{b}])$	,! 14 ( $(\ )$ I: 13)	i
$\forall \mathbf{b} (\neg (\mathbf{b} \infty) \equiv \phi \Rightarrow \omega[\mathbf{b}])$	! 15 ( $\forall$ I: 1,14)	i
$\square$		

! 8.		i
$\vdash \forall b \forall x ( (b \infty)[x] \Rightarrow \omega[x] )$		i
<b>b, x</b>	,! 1 (Prem)	i
$(b \infty)[x]$	,! 2 (Prem)	i
$( (b \infty)[x] \Rightarrow \leq[b, x] )$	,! 3 ( $\forall E$ : P3)	i
$(b \infty)[x] \Rightarrow \leq[b, x]$	,! 4 ( $(\Rightarrow)E$ : 3)	i
$\leq[b, x]$	,! 5 ( $\Rightarrow E$ : 2,4)	i
$( \leq[b, x] \Rightarrow \omega[x] )$	,! 6 ( $\forall E$ : C3.7)	i
$\leq[b, x] \Rightarrow \omega[x]$	,! 7 ( $(\Rightarrow)E$ : 6)	i
$\omega[x]$	,! 8 ( $\Rightarrow E$ : 5,7)	i
$(b \infty)[x] \Rightarrow \omega[x]$	,! 9 ( $\Rightarrow I$ : 2,8)	i
$( (b \infty)[x] \Rightarrow \omega[x] )$	,! 10 ( $(\Rightarrow)I$ : 9)	i
$\forall b \forall x ( (b \infty)[x] \Rightarrow \omega[x] )$	! 11 ( $\forall I$ : 1,10)	i
$\square$		
! 9.		i
$\vdash \forall b (b \infty) \subseteq \omega$		i
<b>b</b>	,! 1 (Prem)	i
$\forall x ( (b \infty)[x] \Rightarrow \omega[x] )$	,! 2 ( $\forall E$ : P8)	i
$(b \infty) \subseteq \omega$	,! 3 ( $\S I$ : II1.1,2)	i
$\forall b (b \infty) \subseteq \omega$	! 4 ( $\forall I$ : 1,3)	i
$\square$		
! 10.		i
$\vdash (0 \infty) \equiv \omega$		i
$(0 \infty) \subseteq \omega$	,! 1 ( $\forall E$ : P9)	i
<b>x</b>	,! 2 (Prem)	i
$\omega[x]$	,! 3 (Prem)	i
$\square \square \square ( \omega[x] \Rightarrow \leq[0, x] )$	,! 4 ( $\forall E$ : C3.24)	i
$\square \square \square \omega[x] \Rightarrow \leq[0, x]$	,! 5 ( $(\Rightarrow)E$ : 4)	i

$\omega \subseteq \leq[0, \mathbf{x}]$	, ! 6 ( $\Rightarrow$ E: 3,5)	i
$(\leq[0, \mathbf{x}] \Rightarrow (0 \infty)[\mathbf{x}])$	, ! 7 ( $\forall$ E: P4)	i
$\leq[0, \mathbf{x}] \Rightarrow (0 \infty)[\mathbf{x}]$	, ! 8 ( $(\ )$ E: 7)	i
$\omega \subseteq (0 \infty)[\mathbf{x}]$	, ! 9 ( $\Rightarrow$ E: 6,8)	i
$\omega[\mathbf{x}] \Rightarrow (0 \infty)[\mathbf{x}]$	, ! 10 ( $\Rightarrow$ I: 3,9)	i
$(\omega[\mathbf{x}] \Rightarrow (0 \infty)[\mathbf{x}])$	, ! 11 ( $(\ )$ I: 10)	i
$\forall \mathbf{x} (\omega[\mathbf{x}] \Rightarrow (0 \infty)[\mathbf{x}])$	, ! 12 ( $\forall$ I: 2,11)	i
$\omega \subseteq (0 \infty)$	, ! 13 ( $\S$ I: III1.1,12)	i
$(0 \infty) \subseteq \omega \ \& \ \omega \subseteq (0 \infty)$	, ! 14 ( $\&$ I: 1,13)	i
$((0 \infty) \subseteq \omega \ \& \ \omega \subseteq (0 \infty) \Rightarrow (0 \infty) \equiv \omega)$	, ! 15 ( $\forall$ E: III1.8)	i
$(0 \infty) \subseteq \omega \ \& \ \omega \subseteq (0 \infty) \Rightarrow (0 \infty) \equiv \omega$	, ! 16 ( $(\ )$ I: 15)	i
$(0 \infty) \equiv \omega$	! 17 ( $\Rightarrow$ I: 14,16)	i

□