# !CHAPTER 3

# THE LEAST NATURAL NUMBER¡

! This chapter introduces and develops the concept of the least natural number. It begins by justifying (P1 and P2) the introduction (P3) of the least natural number operator. The most substantial subsequent propositions are late in the chapter: P18 (the least natural number of a union of predicates equals the smaller least natural number of the predicates) and P21 (the least natural number of the finite interval (b _ c) is b). ¡

! **1.** ¡

⊦ ∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
⇒ ∃a (ω[a] & P[a] & ∀y (ω[a] & P[a] ⇒ ≤[a,y])) ) ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ,! 2 (Prem) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ φ ⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x]) ) ,! 3 (∀E: II5.29) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ φ ⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

( ∃x (ω[x] & **P**[x])
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y])) )
,! 6 (∀E: V3.73) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x])
⇒ ∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 7 (()E: 6) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[x,y]))
,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**a**,y]))
,! 9 (∃E: 8) ¡

∃a (ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]))
,! 10 (∃I: 9) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ φ ⇒ ∃a (ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]))
,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**)
⇒ ∃a (ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y])) )
,! 12 (()I: 11) ¡

∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ φ
⇒ ∃a (ω[a] & P[a] & ∀y (ω[a] & P[a] ⇒ ≤[a,y])) )
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **2.** ¡

$\vdash \forall P\ ( \neg (\omega \cap P) \equiv \phi$
$\Rightarrow \forall a \forall b\ ( ( \omega[a]\ \&\ P[a]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow \leq[a,y]) )$
$\&\ ( \omega[b]\ \&\ P[b]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow \leq[b,y]) )$
$\Rightarrow a = b ) )$ ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

$\neg (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$ ,! 2 (Prem) ¡

**a**,**b** ,! 3 (Prem) ¡

$( \omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},y]) )$
$\&\ ( \omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},y]) )$
,! 4 (Prem) ¡

$( \omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},y]) )$
,! 5 (&E: 4) ¡

$( \omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},y]) )$
,! 6 (&E: 4) ¡

$\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},y])$
,! 7 (()E: 5) ¡

$\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}]$ ,! 8 (&E: 7) ¡

$\forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},y])$ ,! 9 (&E: 7) ¡

$\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},y])$
,! 10 (()E: 6) ¡

$\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}]$ ,! 11 (&E: 10) ¡

$\forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},y])$ ,! 12 (&E: 10) ¡

$(\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},\mathbf{b}])$ ,! 13 (∀E: 9) ¡

$\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{b}] \Rightarrow \leq[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ,! 14 (()E: 13) ¡

$\leq[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ,! 15 (⇒E: 11,14) ¡

$(\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},\mathbf{a}])$ ,! 16 (∀E: 12) ¡

$\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \mathbf{P}[\mathbf{a}] \Rightarrow \leq[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ ,! 17 (()E: 16) ¡

$\leq[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ ,! 18 (⇒E: 8,17) ¡

$\leq[\mathbf{a},\mathbf{b}]\ \&\ \leq[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ ,! 19 (&I: 15,18) ¡

$( \leq[\mathbf{a},\mathbf{b}]\ \&\ \leq[\mathbf{b},\mathbf{a}] \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} )$ ,! 20 (∀E: V3.22) ¡

≤[**a**,**b**] & ≤[**b**,**a**] ⇒ **a** = **b** ,! 21 (()E: 20) ¡

**a** = **b** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

( ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**a**,y]) )
& ( ω[**b**] & **P**[**b**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**b**,y]) )
⇒ **a** = **b**
,! 23 (⇒I: 4,22) ¡

( ( ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**a**,y]) )
& ( ω[**b**] & **P**[**b**] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**b**,y]) )
⇒ **a** = **b** )
,! 24 (()I: 23) ¡

∀a∀b ( ( ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]) )
& ( ω[b] & **P**[b] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[b,y]) )
⇒ a = b )
,! 25 (∀I: 3,24) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∀a∀b ( ( ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]) )
& ( ω[b] & **P**[b] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[b,y]) )
⇒ a = b )
,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ∀a∀b ( ( ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]) )
& ( ω[b] & **P**[b] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[b,y]) )
⇒ a = b ) )
,! 27 (()I: 26) ¡

∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
⇒ ∀a∀b ( ( ω[a] & P[a] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[a,y]) )
& ( ω[b] & P[b] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[b,y]) )
⇒ a = b ) )
! 28 (∀I: 1,27) ¡

▯

! **3.** μ represents the least natural number. ¡

𝕋 μ ; (μ**P**) ; ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ;
( ω[a] & **P**[a] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[a,y]) )
¡! (𝕋D: P1,P2) ¡

! **4.** ¡

⊢ ∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ
⇒ ω[(μP)] & P[(μP)] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[(μP),y]) ) ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$ ,! 2 (Prem) ¡

$(\ \omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])\ )$
,! 3 (𝕀I: P3,2) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 5 (⇒I: 2,4) ¡

$(\ \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])\ )$
,! 6 (()I: 5) ¡

$\forall P\ (\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu P)]\ \&\ P[(\mu P)]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ P[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu P),y])\ )$
! 7 (∀I: 1,6) ¡

▯

! **5.** ¡

$\vdash \forall P\ (\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \omega[(\mu P)]\ )$ ¡

$\mathbf{P}$ ,! 1 (Prem) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$ ,! 2 (Prem) ¡

$(\ \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])\ )$
,! 3 (∀E: P4) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 4 (()E: 3) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]\ \&\ \forall y\ (\omega[y]\ \&\ \mathbf{P}[y] \Rightarrow\ \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 6 (&E: 5) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

$(\ \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})]\ )$ ,! 8 (()I: 7) ¡

$\forall P\ (\ \neg\ (\omega \cap P) \equiv \phi \Rightarrow \omega[(\mu P)]\ )$ ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ P[(μP)] ) ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) )
,! 3 (∀E: P4) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

**P**[(μ**P**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ **P**[(μ**P**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ **P**[(μ**P**)] ) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ P[(μP)] ) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **7.** ¡

⊦ ∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ω[(μP)] & P[(μP)] ) ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) )
,! 3 (∀E: P4) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ) ,! 8 (()I: 7) ¡

∀P ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ⇒ ω[(μP)] & P[(μP)] ) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

! **8.** ¡

⊦ ∀P∀y ( ω[y] & P[y] ⇒ ≤[(μP),y] ) ¡

**P**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**y**] & P[**y**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**y**] & P[**y**]) ,! 3 (()I: 2) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 4 (∃I: 3) ¡

( ∃x (ω[x] & **P**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ) ,! 5 (∀E: II5.26) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) )
,! 8 (∀E: P4) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ
⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 9 (()E: 8) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) ,! 11 (&E: 10) ¡

(ω[**y**] & P[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**]) ,! 12 (∀E: 11) ¡

ω[**y**] & P[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(μ**P**),**y**] ,! 14 (⇒E: 2,13) ¡

ω[**y**] & P[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

( ω[**y**] & P[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ) ,! 16 (()I: 15) ¡

∀P∀y ( ω[y] & P[y] ⇒ ≤[(μP),y] ) ! 17 (∀I: 1,16) ¡



! **9.** ¡

⊦ ∀P∀y ( <[y,(μP)] ⇒ ¬ P[y] ) ¡

**P**,**y** ,! 1 (Prem) ¡

<[**y**,(μ**P**)] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ ,! 3 (𝕀E: P3,2) ¡

P[y] ,! 4 (Prem) ¡

( <[y,(μP)] ⇒ ω[y] ) ,! 5 (∀E: V4.10; (μP): P3,3) ¡

<[y,(μP)] ⇒ ω[y] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[y] ,! 7 (⇒E: 2,6) ¡

ω[y] & P[y] ,! 8 (&I: 4,7) ¡

( ω[y] & P[y] ⇒ ≤[(μP),y] ) ,! 9 (∀E: P8) ¡

ω[y] & P[y] ⇒ ≤[(μP),y] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[(μP),y] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

<[y,(μP)] & ≤[(μP),y] ,! 12 (&E: 2,11) ¡

( <[y,(μP)] & ≤[(μP),y] ⇒ ℑ ) ,! 13 (∀E: V4.19; (μP): P3,3) ¡

<[y,(μP)] & ≤[(μP),y] ⇒ ℑ ,! 14 (()E: 13) ¡

ℑ ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

P[y] ⇒ ℑ ,! 16 (⇒I: 4,15) ¡

¬ P[y] ,! 17 (¬I: 16) ¡

<[y,(μP)] ⇒ ¬ P[y] ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

( <[y,(μP)] ⇒ ¬ P[y] ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀P∀y ( <[y,(μP)] ⇒ ¬ P[y] ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

□

! **10.** ¡

⊢ ∀P∀a ( ω[a] & P[a] & ∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[a,y]) ⇒ (μP) = a ) ¡

P,a ,! 1 (Prem) ¡

ω[a] & P[a] & ∀y(ω[y] & P[y] ⇒ ≤[a,y]) ,! 2 (Prem) ¡

ω[a] & P[a] ,! 3 (&E: 2) ¡

∀y (ω[y] & P[y] ⇒ ≤[a,y]) ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[a] & P[a] ⇒ ≤[(μP),a]) ,! 5 (∀E: P4) ¡

ω[**a**] & **P**[**a**] ⇒ ≤[(μ**P**),**a**] ,! 6 (()E: 5) ¡

≤[(μ**P**),**a**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 8 (𝕋E: P3,7) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] )
,! 9 (∀E: P7) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ⇒ ≤[**a**,(μ**P**)]) ,! 12 (∀E: 4;
(μ**P**): P3,8) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ⇒ ≤[**a**,(μ**P**)] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[**a**,(μ**P**)] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

≤[(μ**P**),**a**] & ≤[**a**,(μ**P**)] ,! 15 (&I: 7,14) ¡

( ≤[(μ**P**),**a**] & ≤[**a**,(μ**P**)] ⇒ (μ**P**) = **a** ) ,! 16 (∀E: V3.22;
(μ**P**): P3,8) ¡

≤[(μ**P**),**a**] & ≤[**a**,(μ**P**)] ⇒ (μ**P**) = **a** ,! 17 (()E: 16) ¡

(μ**P**) = **a** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**a**,y]) ⇒ (μ**P**) = **a**
,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

( ω[**a**] & **P**[**a**] & ∀y(ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[**a**,y]) ⇒ (μ**P**) = **a** )
,! 20 (()I: 19) ¡

∀P∀a ( ω[a] & P[a] & ∀y(ω[y] & P[y] ⇒ ≤[a,y]) ⇒ (μP) = a )
! 21 (∀I: 1,20) ¡

□

! **11.** ¡

⊦ ∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ≤[(μQ),(μP)] ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

**P** ⊆ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] )

,! 5 (∀E: P7) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[(μ**P**)] & **P**[(μ**P**)] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[(μ**P**)] ,! 8 (&E: 7) ¡

**P**[(μ**P**)] ,! 9 (&E: 7) ¡

**P**[(μ**P**)] & **P** ⊆ **Q** ,! 10 (&I: 4,9) ¡

( **P**[(μ**P**)] & **P** ⊆ **Q** ⇒ **Q**[(μ**P**)] ) ,! 11 (∀E: II1.2; (μ**P**): P3,3) ¡

**P**[(μ**P**)] & **P** ⊆ **Q** ⇒ **Q**[(μ**P**)] ,! 12 (()E: 11) ¡

**Q**[(μ**P**)] ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[(μ**P**)] & **Q**[(μ**P**)] ,! 14 (&I: 8,13) ¡

( ω[(μ**P**)] & **Q**[(μ**P**)] ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ) ,! 15 (∀E: P8; (μ**P**): P3,3) ¡

ω[(μ**P**)] & **Q**[(μ**P**)] ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ,! 16 (()E: 15) ¡

≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & P ⊆ Q ⇒ ≤[(μQ),(μP)] ) ! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **12.** ¡

⊢ ∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & P ≡ Q ⇒ (μP) = (μQ) ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

**P** ≡ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

( **P** ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ) ,! 5 (∀E: II1.13) ¡

**P** ≡ **Q** ⇒ **P** ⊆ **Q** & **Q** ⊆ **P** ,! 6 (()E: 5) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ ,! 8 (&E: 7) ¡

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ ,! 9 (&E: 7) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ ,! 10 (&I: 3,8) ¡

$(\ \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})]\ )$
,! 11 (∀E: P11) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q} \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})]$
,! 12 (()E: 11) ¡

$\leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})]$ ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

$(\ \mathbf{P} \equiv \mathbf{Q} \Rightarrow (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q})\ )$ ,! 14 (∀E: II3.35) ¡

$\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q} \Rightarrow (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q})$ ,! 15 (()E: 14) ¡

$(\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q})$ ,! 16 (⇒E: 4,15) ¡

$(\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q}) \;\&\; \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$ ,! 17 (&I: 3,16) ¡

$(\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q}) \;\&\; \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi\ )$
,! 18 (∀E: II1.42) ¡

$(\omega \cap \mathbf{P}) \equiv (\omega \cap \mathbf{Q}) \;\&\; \neg\ (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi \Rightarrow \neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$
,! 19 (()E: 18) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$ ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ ,! 21 (&I: 9,20) ¡

$(\ \neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})]\ )$
,! 22 (∀E: P11) ¡

$\neg\ (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi \;\&\; \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P} \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})]$
,! 23 (()E: 22) ¡

$\leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})]$ ,! 34 (⇒E: 21,23) ¡

$\leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})] \;\&\; \leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})]$ ,! 35 (&I: 13,34) ¡

$(\ \leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})] \;\&\; \leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})] \Rightarrow (\mu\mathbf{P}) = (\mu\mathbf{Q})\ )$
,! 36 (∀E: V3.22;
$(\mu\mathbf{P})$: P3,3;
$(\mu\mathbf{Q})$: P3,20) ¡

$\leq[(\mu\mathbf{P}),(\mu\mathbf{Q})] \;\&\; \leq[(\mu\mathbf{Q}),(\mu\mathbf{P})] \Rightarrow (\mu\mathbf{P}) = (\mu\mathbf{Q})$
,! 37 (()E: 36) ¡

$(\mu\mathbf{P}) = (\mu\mathbf{Q})$ ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 39 (⇒I: 2,38) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 40 (()I: 39) ¡

∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & P ≡ Q ⇒ (μP) = (μQ) )
! 41 (∀I: 1,40) ¡

▯

! **13.** ¡

⊢ ∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & Q ≡ P ⇒ (μP) = (μQ) ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **Q** ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 3 (&E: 2) ¡

**Q** ≡ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

( **Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ) ,! 5 (∀E: II1.10) ¡

**Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

**P** ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 9 (∀E: P12) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 10 (()E: 9) ¡

(μ**P**) = (μ**Q**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **Q** ≡ **P** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **Q** ≡ **P** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q ( ¬ (ω ∩ P) ≡ ϕ & Q ≡ P ⇒ (μP) = (μQ) )
! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( (μP) = n & P ≡ Q ⇒ (μQ) = n ) ¡

**n**,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ,! 2 (Prem) ¡

(μ**P**) = **n** ,! 3 (&E: 2) ¡

**P** ≡ **Q** ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 5 (𝕋E: P3,3) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ,! 6 (&I: 4,5) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 7 (∀E: P12) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 8 (()E: 7) ¡

(μ**P**) = (μ**Q**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(μ**Q**) = **n** ,! 10 (=E: 3,9) ¡

(μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**Q**) = **n** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

( (μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**Q**) = **n** ) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀P∀Q ( (μP) = n & P ≡ Q ⇒ (μQ) = n ) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀P∀Q ( (μP) = n & Q ≡ P ⇒ (μQ) = n ) ¡

**n**,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

(μ**P**) = **n** & **Q** ≡ **P** ,! 2 (Prem) ¡

(μ**P**) = **n** ,! 3 (&E: 2) ¡

**Q** ≡ **P** ,! 4 (&E: 2) ¡

( **Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ) ,! 5 (∀E: II1.10) ¡

**Q** ≡ **P** ⇒ **P** ≡ **Q** ,! 6 (()E: 5) ¡

**P** ≡ **Q** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

(μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ,! 8 (&I: 3,7) ¡

( (μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**Q**) = **n** ) ,! 9 (∀E: P14) ¡

(μ**P**) = **n** & **P** ≡ **Q** ⇒ (μ**Q**) = **n** ,! 10 (()E: 9) ¡

(μ**Q**) = **n** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(μ**P**) = **n** & **Q** ≡ **P** ⇒ (μ**Q**) = **n** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

( (μ**P**) = **n** & **Q** ≡ **P** ⇒ (μ**Q**) = **n** ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀P∀Q ( (μP) = n & Q ≡ P ⇒ (μQ) = n ) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **16.** ¡

⊢ ∀P∀Q ( P ⊆ Q & P[(μQ)] ⇒ (μP) = (μQ) ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ,! 2 (Prem) ¡

**P** ⊆ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

**P**[(μ**Q**)] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ (ω ∩ **Q**) ≡ ϕ ,! 5 (𝕋E: P3,4) ¡

( ¬ (ω ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**Q**)] ) ,! 6 (∀E: P5) ¡

¬ (ω ∩ **Q**) ≡ ϕ ⇒ ω[(μ**Q**)] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[(μ**Q**)] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[(μ**Q**)] & **P**[(μ**Q**)] ,! 9 (&I: 4,8) ¡

( ω[(μ**Q**)] & **P**[(μ**Q**)] ⇒ ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ) ,! 10 (∀E: P8; (μ**Q**): P3,5) ¡

ω[(μ**Q**)] & **P**[(μ**Q**)] ⇒ ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ,! 11 (()E: 10) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 13 (𝕋E: P3,12) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ,! 14 (&I: 3,13) ¡

( ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] )
,! 15 (∀E: P11) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ & **P** ⊆ **Q** ⇒ ≤[(μ**Q**),(μ**P**)]
,! 16 (()E: 15) ¡

≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ,! 18 (&I: 12,17) ¡

( ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 19 (∀E: V3.22; (μ**P**): P3,13; (μ**Q**): P3,5) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),(μ**P**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**)
,! 20 (()E: 19) ¡

(μ**P**) = (μ**Q**) ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

( **P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀P∀Q ( P ⊆ Q & P[(μQ)] ⇒ (μP) = (μQ) ) ! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **17.** ¡

⊦ ∀n∀P∀Q ( P ⊆ Q & P[n] & (μQ) = n ⇒ (μP) = n ) ¡

**n**,**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[**n**] & (μ**Q**) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

**P** ⊆ **Q** ,! 3 (&E: 2) ¡

**P**[**n**] ,! 4 (&E: 2) ¡

(μ**Q**) = **n** ,! 5 (&E: 2) ¡

**P**[(μ**Q**)] ,! 6 (=E: 4,5) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ,! 7 (&I: 3,6) ¡

( **P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ) ,! 8 (∀E: P16) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[(μ**Q**)] ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 9 (()E: 8) ¡

(μ**P**) = (μ**Q**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

**P** ⊆ **Q** & **P**[**n**] & (μ**Q**) = **n** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

( **P** ⊆ **Q** & **P**[**n**] & (μ**Q**) = **n** ⇒ (μ**P**) = (μ**Q**) )
,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀P∀Q ( P ⊆ Q & P[n] & (μQ) = n ⇒ (μP) = n )
! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **18.** ¡

⊦ ∀P∀Q ( ≤[(μP),(μQ)] ⇒ (μ(P ∪ Q)) = (μP) ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 3 (𝕋E: P3,2) ¡

$\neg (\omega \cap \mathbf{Q}) \equiv \phi$ ,! 4 (𝕀E: P3,2) ¡

$( \omega[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})]$
$\;\&\; \forall y\ (\omega[y] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
$\;\Rightarrow (\mu(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})) = (\mu\mathbf{P}) )$
,! 5 ($\forall$E: P10; ($\mu$**P**): P3,3) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})]$
$\&\; \forall y\ (\omega[y] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
$\Rightarrow (\mu(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})) = (\mu\mathbf{P})$
,! 6 (()E: 5) ¡

! To show: $\omega[(\mu\mathbf{P})]$ ¡

$( \neg (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\;\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \forall y\ (\omega[y] \;\&\; \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y]) )$
,! 7 ($\forall$E: P4) ¡

$\neg (\omega \cap \mathbf{P}) \equiv \phi$
$\Rightarrow \omega[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \forall y\ (\omega[y] \;\&\; \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 8 (()E: 7) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})] \;\&\; \forall y\ (\omega[y] \;\&\; \mathbf{P}[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$
,! 9 ($\Rightarrow$E: 3,8) ¡

$\omega[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 10 (&E: 9) ¡

! To show: $(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})]$ ¡

$\mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 11 (&E: 9) ¡

$( \mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})] )$ ,! 12 ($\forall$E: II2.5; ($\mu$**P**): P3,3) ¡

$\mathbf{P}[(\mu\mathbf{P})] \Rightarrow (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 13 (()E: 12) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[(\mu\mathbf{P})]$ ,! 14 ($\Rightarrow$E: 11,13) ¡

! To show: $\forall y\ (\omega[y] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[y] \Rightarrow \leq[(\mu\mathbf{P}),y])$ ¡

**y** ,! 15 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{y}] \;\&\; (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[\mathbf{y}]$ ,! 16 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{y}]$ ,! 17 (&E: 16) ¡

$(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[\mathbf{y}]$ ,! 18 (&E: 16) ¡

$( (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})[\mathbf{y}] \Rightarrow \mathbf{P}[\mathbf{y}] \vee \mathbf{Q}[\mathbf{y}] )$ ,! 19 ($\forall$E: II2.3) ¡

(**P** ∪ **Q**)[**y**] ⇒ **P**[**y**] ∨ **Q**[**y**] ,! 20 (()E: 19) ¡

**P**[**y**] ∨ **Q**[**y**] ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

**P**[**y**] ,! 22 (Prem) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 23 (&I: 17,22) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) ,! 24 (&E: 9) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**]) ,! 25 (∀E: 24) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 26 (()E: 25) ¡

≤[(μ**P**),**y**] ,! 27 (⇒E: 23,26) ¡

**P**[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 28 (⇒I: 22,27) ¡

**Q**[**y**] ,! 29 (Prem) ¡

ω[**y**] & **Q**[**y**] ,! 30 (&I: 17,29) ¡

( ω[**y**] & **Q**[**y**] ⇒ ≤[(μ**Q**),**y**] ) ,! 31 (∀E: P8) ¡

ω[**y**] & **Q**[**y**] ⇒ ≤[(μ**Q**),**y**] ,! 32 (()E: 31) ¡

≤[(μ**Q**),**y**] ,! 33 (⇒E: 30,32) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),**y**] ,! 34 (&I: 2,33) ¡

( ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] )
,! 35 (∀E: V3.20;
(μ**P**): P3,3;
(μ**Q**): P3,4) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] & ≤[(μ**Q**),**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**]
,! 36 (()E: 35) ¡

≤[(μ**P**),**y**] ,! 37 (⇒E: 34,36) ¡

**Q**[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 38 (⇒I: 29,37) ¡

≤[(μ**P**),**y**] ,! 39 (∨E: 21,28,38)
¡

ω[**y**] & (**P** ∪ **Q**)[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**] ,! 40 (⇒I: 16,39) ¡

(ω[**y**] & (**P** ∪ **Q**)[**y**] ⇒ ≤[(μ**P**),**y**]) ,! 41 (()I: 40) ¡

∀y (ω[y] & (**P** ∪ **Q**)[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y]) ,! 42 (∀I: 15,41) ¡

! Conclusion. ¡

ω[(μ**P**)] & (**P** ∪ **Q**)[(μ**P**)] ,! 43 (&I: 10,14) ¡

ω[(μ**P**)] & (**P** ∪ **Q**)[(μ**P**)]
& ∀y (ω[y] & (**P** ∪ **Q**)[y] ⇒ ≤[(μ**P**),y])
,! 44 (&I: 42,43) ¡

(μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ,! 45 (⇒E: 6,44) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ,! 46 (⇒I: 2,45) ¡

( ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ) ,! 47 (()I: 46) ¡

∀P∀Q ( ≤[(μP),(μQ)] ⇒ (μ(P ∪ Q)) = (μP) )
! 48 (∀I: 1,47) ¡

□

! **19.** ¡

⊢ ∀P∀Q ( ≤[(μP),(μQ)] ⇒ (μ(Q ∪ P)) = (μP) ) ¡

**P**,**Q** ,! 1 (Prem) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ,! 2 (Prem) ¡

( ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ) ,! 3 (∀E: P18) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ,! 4 (()E: 3) ¡

(μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**) ,! 6 (∀E: II2.16) ¡

(μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**)
,! 7 (&I: 5,6) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 8 (𝕋E: P3,2) ¡

( (μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**)
⇒ (μ(**Q** ∪ **P**)) = (μ**P**) )
,! 9 (∀E: P14;
(μ**P**): P3,8) ¡

(μ(**P** ∪ **Q**)) = (μ**P**) & (**P** ∪ **Q**) ≡ (**Q** ∪ **P**)
⇒ (μ(**Q** ∪ **P**)) = (μ**P**)
,! 10 (()E: 9) ¡

(μ(**Q** ∪ **P**)) = (μ**P**) ,! 11 (⇒E: 7,10) ¡

≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**Q** ∪ **P**)) = (μ**P**) ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

( ≤[(μ**P**),(μ**Q**)] ⇒ (μ(**Q** ∪ **P**)) = (μ**P**) ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀P∀Q ( ≤[(μP),(μQ)] ⇒ (μ(Q ∪ P)) = (μP) )

! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **20.** ¡

⊢ ∀P ( P[0] ⇒ (μP) = 0 ) ¡

**a** ,! 1 (Prem) ¡

**P**[0] ,! 2 (Prem) ¡

ω[0] & **P**[0] ,! 3 (&I: ω0,2) ¡

**y** ,! 4 (Prem) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ,! 5 (Prem) ¡

ω[**y**] ,! 6 (&E: 5) ¡

( ω[**y**] ⇒ ≤[0,**y**] ) ,! 7 (∀E: V3.24) ¡

ω[**y**] ⇒ ≤[0,**y**] ,! 8 (()E: 7) ¡

≤[0,**y**] ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[0,**y**] ,! 10 (⇒I: 5,9) ¡

(ω[**y**] & **P**[**y**] ⇒ ≤[0,**y**]) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y]) ,! 12 (∀I: 4,11) ¡

ω[0] & **P**[0] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y])
,! 13 (&I: 3,12) ¡

( ω[0] & **P**[0] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y]) ⇒ (μ**P**) = 0 )
,! 14 (∀E: P10) ¡

ω[0] & **P**[0] & ∀y (ω[y] & **P**[y] ⇒ ≤[0,y]) ⇒ (μ**P**) = 0
,! 15 ((()E: 14) ¡

(μ**P**) = 0 ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

**P**[0] ⇒ (μ**P**) = 0 ,! 17 (⇒I: 2,16) ¡

( **P**[0] ⇒ (μ**P**) = 0 ) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀P ( P[0] ⇒ (μP) = 0 ) ! 19 (∀I: 1,18) ¡

▯

! **21.** ¡

⊢ ∀b∀c ( ≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ) ¡

**b**,**c** ,! 1 (Prem) ¡

≤[b,c] ,! 2 (Prem) ¡

( ≤[b,c] ⇒ (b _ c)[b] ) ,! 3 (∀E: C2.7) ¡

≤[b,c] ⇒ (b _ c)[b] ,! 4 (()E: 3) ¡

(b _ c)[b] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

( (b _ c)[b] ⇒ ω[b] ) ,! 6 (∀E: C2.22) ¡

(b _ c)[b] ⇒ ω[b] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[b] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[b] & (b _ c)[b] ,! 9 (&I: 5,8) ¡

y ,! 10 (Prem) ¡

ω[y] & (b _ c)[y] ,! 11 (Prem) ¡

(b _ c)[y] ,! 12 (&E: 11) ¡

( (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y] ) ,! 13 (∀E: C2.5) ¡

(b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y] ,! 14 (()E: 13) ¡

≤[b,y] ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y] ,! 16 (⇒I: 11,15) ¡

(ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y]) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀y (ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y]) ,! 18 (∀I: 10,17) ¡

ω[b] & (b _ c)[b] & ∀y (ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y])
,! 19 (&I: 9,19) ¡

( ω[b] & (b _ c)[b] & ∀y (ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y])
⇒ (μ(b _ c)) = b )
,! 20 (∀E: P10) ¡

ω[b] & (b _ c)[b] & ∀y (ω[y] & (b _ c)[y] ⇒ ≤[b,y])
⇒ (μ(b _ c)) = b
,! 21 (()E: 20) ¡

(μ(b _ c)) = b ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

( ≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀b∀c ( ≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

▯

! **22.** ¡

⊦ ∀P∀b∀c ( P ⊆ (b _ c) & P[b] ⇒ (μP) = b ) ¡

P,b,c ,! 1 (Prem) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[b] ,! 2 (Prem) ¡

P[b] ,! 3 (&E: 2) ¡

P ⊆ (b _ c) ,! 4 (&E: 2) ¡

P[b] & P ⊆ (b _ c) ,! 5 (&I: 3,4) ¡

( P[b] & P ⊆ (b _ c) ⇒ (b _ c)[b] ) ,! 6 (∀E: II1.2) ¡

P[b] & P ⊆ (b _ c) ⇒ (b _ c)[b] ,! 7 (()E: 6) ¡

(b _ c)[b] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

( (b _ c)[b] ⇒ ≤[b,c] ) ,! 9 (∀E: C2.6) ¡

(b _ c)[b] ⇒ ≤[b,c] ,! 10 (()E: 9) ¡

≤[b,c] ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

( ≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ) ,! 12 (∀E: P21) ¡

≤[b,c] ⇒ (μ(b _ c)) = b ,! 13 (()E: 12) ¡

(μ(b _ c)) = b ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[b] & (μ(b _ c)) = b ,! 15 (&I: 2,14) ¡

( P ⊆ (b _ c) & P[b] & (μ(b _ c)) = b ⇒ (μP) = b )
,! 16 (∀E: P17) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[b] & (μ(b _ c)) = b ⇒ (μP) = b
,! 17 (()E: 16) ¡

(μP) = b ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

P ⊆ (b _ c) & P[b] ⇒ (μP) = b ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

( P ⊆ (b _ c) & P[b] ⇒ (μP) = b ) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀P∀b∀c ( P ⊆ (b _ c) & P[b] ⇒ (μP) = b ) ! 21 (∀I: 1,20) ¡

▯

! **23.** ¡

⊦ ∀a ( ω[a] ⇒ (μ(a•)) = a ) ¡

**a** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**a**] ,! 2 (Prem) ¡

( ω[**a**] ⇒ (**a** _ **a**) ≡ (**a**•) ) ,! 3 (∀E: C2.30) ¡

ω[**a**] ⇒ (**a** _ **a**) ≡ (**a**•) ,! 4 (()E: 3) ¡

(**a** _ **a**) ≡ (**a**•) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

( (**a** _ **a**) ≡ (**a**•) ⇒ (**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) ) ,! 6 (∀E: II1.12) ¡

(**a** _ **a**) ≡ (**a**•) ⇒ (**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) ,! 7 (()I: 6) ¡

(**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) ,! 8 (⇒I: 5,7) ¡

(**a**•)[**a**] ,! 9 (∀E: II8.5) ¡

(**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) & (**a**•)[**a**] ,! 10 (&I: 8,9) ¡

( (**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) & (**a**•)[**a**] ⇒ (μ(**a**•)) = **a** )
,! 11 (∀E: P22) ¡

(**a**•) ⊆ (**a** _ **a**) & (**a**•)[**a**] ⇒ (μ(**a**•)) = **a**
,! 12 (()E: 11) ¡

(μ(**a**•)) = **a** ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

ω[**a**] ⇒ (μ(**a**•)) = **a** ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

( ω[**a**] ⇒ (μ(**a**•)) = **a** ) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀a ( ω[a] ⇒ (μ(a•)) = a ) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

▯

! **24.** ¡

⊢ ∀P ( ¬ ∃m (μP) = m ⇒ ∀n ( ω[n] ⇒ ¬ P[n] ) ) ¡

**P** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ∃m (μ**P**) = m ,! 2 (Prem) ¡

**n** ,! 3 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 4 (Prem) ¡

**P**[**n**] ,! 5 (Prem) ¡

ω[**n**] & **P**[**n**] ,! 6 (&I: 4,5) ¡

(ω[**n**] & **P**[**n**]) ,! 7 (()I: 6) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ,! 8 (∃I: 7) ¡

( ∃x (ω[x] & **P**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ) ,! 9 (∀E: II5.26) ¡

∃x (ω[x] & **P**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 10 (()E: 9) ¡

¬ (ω ∩ **P**) ≡ ϕ ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(μ**P**) = (μ**P**) ,! 12 (=I; (μ**P**): P3,11) ¡

∃m (μ**P**) = m ,! 13 (∃I: 12; (μ**P**): P3,11) ¡

ℑ ,! 14 (ℑI: 2,13) ¡

**P**[**n**] ⇒ ℑ ,! 15 (⇒I: 5,14) ¡

¬ **P**[**n**] ,! 16 (¬I: 15) ¡

ω[**n**] ⇒ ¬ **P**[**n**] ,! 17 (⇒I: 4,16) ¡

( ω[**n**] ⇒ ¬ **P**[**n**] ) ,! 18 (()I: 17) ¡

∀n ( ω[n] ⇒ ¬ **P**[n] ) ,! 19 (∀I: 3,18) ¡

¬ ∃m (μ**P**) = m ⇒ ∀n ( ω[n] ⇒ ¬ **P**[n] ) ,! 20 (⇒I: 2,19) ¡

( ¬ ∃m (μ**P**) = m ⇒ ∀n ( ω[n] ⇒ ¬ **P**[n] ) ) ,! 21 (()I: 20) ¡

∀P ( ¬ ∃m (μP) = m ⇒ ∀n ( ω[n] ⇒ ¬ P[n] ) ) ! 22 (∀I: 1,21) ¡

▯