!CHAPTER 5

THE GREATEST COMMMON DIVISOR¡

! This chapter begins by introducing the notion of the common divisors (δ **n** **m**) of two finite numbers **n** and **m**. It is shown in the case when one of these numbers is non-zero, that the divisors have finite (and non-emty) intersection with the natural numbers (P27), and so the pre-supposition for a greatest natural number avails. This is defined (P28) to be the greatest common divisor (**n** ∆ **m**).

The introduction of the greatest common divisor or gcd begins to take us away from elementary arithmetic and into the domain of number theory. Among the important propositions are:

P31: The gcd is a common divisor

P36-P37: The gcd of two numbers divides all their linear combinations

P41: The gcd is greater (or equal to) any common divisor

P42: The gcd is symmetric, i.e. when defined, (**n** ∆ **m**) = (**m** ∆ **n**)

P49-P50: The gcd of a natural number and 1 is 1.

P51: The gcd of two numbers, the first of which is non-zero, can always be expressed as a difference of multiples of the numbers (the multiple of the non-zero number not being the one subtracted).

P53: If a number divides two numbers, then it divides their gcd (if defined)

P55: Euclid's Lemma

P56: Lemma for the Euclidean Algorithm ¡

! **1.** (δ **n** **m**) represents the divisors of **n** and **m**. ¡

𝔻 δ ; (δ **n** **m**) ; ; {a : a|**n** & a|**m** } ¡

! **2.** ¡

⊦ ∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇔ x|n & x|m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ({a : a|**n** & a|**m** }[x] ⇔ x|**n** & x|**m**) ,! 2 (Pred) ¡

∀x ((δ **n** **m**)[x] ⇔ x|**n** & x|**m**) ,! 3 (𝔻I: P1,2) ¡

∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇔ x|n & x|m) ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **3.** ¡

⊦ ∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m) ¡

n,**m**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇔ **x**|**n** & **x**|**m**) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇔ **x**|**n** & **x**|**m** ,! 3 (()E: 2) ¡

(δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m** ,! 4 (⇔E: 3) ¡

((δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m**) ,! 5 (()E: 4) ¡

∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **4.** ¡

⊦ ∀n∀m∀x (x|n & x|m ⇒ (δ n m)[x]) ¡

n,**m**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

((δ **n m**)[**x**] ⇔ **x**|**n** & **x**|**m**) ,! 2 (∀E: P2) ¡

(δ **n m**)[**x**] ⇔ **x**|**n** & **x**|**m** ,! 3 (()E: 2) ¡

x|**n** & **x**|**m** ⇒ (δ **n m**)[**x**] ,! 4 (⇔E: 3) ¡

(**x**|**n** & **x**|**m** ⇒ (δ **n m**)[**x**]) ,! 5 (()E: 4) ¡

∀n∀m∀x (x|n & x|m ⇒ (δ n m)[x]) ! 6 (∀I: 1,5) ¡

▯

! **5.** ¡

⊦ ∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|n) ¡

n,**m**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(δ **n m**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m**) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m** ,! 4 (()E: 3) ¡

x|**n** & **x**|**m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

x|**n** ,! 6 (&E: 5) ¡

(δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((δ **n m**)[**x**] ⇒ **x**|**n**) ,! 8 (()E: 7) ¡

∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|n) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **6.** ¡

⊦ ∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|m) ¡

n,**m**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(δ n m)[x] ,! 2 (Prem) ¡

((δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m) ,! 3 (∀E: P3) ¡

(δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m ,! 4 (()E: 3) ¡

x|n & x|m ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

x|m ,! 6 (&E: 5) ¡

(δ n m)[x] ⇒ x|m ,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

((δ n m)[x] ⇒ x|m) ,! 8 (()E: 7) ¡

∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ x|m) ! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **7.** ¡

⊢ ∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ ω[x]) ¡

n,**m**,**x** ,! 1 (Prem) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ,! 2 (Prem) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n**) ,! 3 (∀E: P5) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** ,! 4 (()E: 3) ¡

x|**n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**x**|**n** ⇒ ω[**x**]) ,! 6 (∀E: C1.3) ¡

x|**n** ⇒ ω[**x**] ,! 7 (()E: 7) ¡

ω[**x**] ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ ω[**x**] ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ ω[**x**]) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m∀x ((δ n m)[x] ⇒ ω[x]) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **8.** ¡

⊢ ∀n∀m (δ n m) ⊆ ω ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

∀x ((δ **n** **m**)[x] ⇒ ω[x]) ,! 2 (∀E: P7) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω ,! 3 (𝕊I: II1.1,2) ¡

∀n∀m (δ n m) ⊆ ω ! 4 (∀I: 1,3) ¡

▯

! **9.** ¡

⊢ ∀n∀m (δ n m) ⊆ (δ m n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

x ,! 2 (Prem) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m**) ,! 4 (∀E: P3) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** & **x**|**m** ,! 5 (()E: 4) ¡

x|**n** & **x**|**m** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

x|**n** ,! 7 (&E: 6) ¡

x|**m** ,! 8 (&E: 6) ¡

x|**m** & **x**|**n** ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(**x**|**m** & **x**|**n** ⇒ (δ **m** **n**)[**x**]) ,! 10 (∀E: P4) ¡

x|**m** & **x**|**n** ⇒ (δ **m** **n**)[**x**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(δ **m** **n**)[**x**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ (δ **m** **n**)[**x**] ,! 13 (⇒I: 3,12) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ (δ **m** **n**)[**x**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀x ((δ **n** **m**)[x] ⇒ (δ **m** **n**)[x]) ,! 15 (∀I: 2,14) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ (δ **m** **n**) ,! 16 (()E: 15) ¡

∀n∀m (δ n m) ⊆ (δ m n) ! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **10.** The divisors of **n** and **m** are the same as the divisors of **m** and **n**. ¡

⊢ ∀n∀m (δ n m) ≡ (δ m n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ (δ **m** **n**) ,! 2 (∀E: P9) ¡

(δ **m** **n**) ⊆ (δ **n** **m**) ,! 3 (∀E: P9) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ (δ **m** **n**) & (δ **m** **n**) ⊆ (δ **n** **m**) ,! 4 (&I: 2,3) ¡

((δ n m) ⊆ (δ m n) & (δ m n) ⊆ (δ n m) ⇒ (δ n m) ≡ (δ m n))
,! 5 (∀E: II1.8) ¡

(δ n m) ⊆ (δ m n) & (δ m n) ⊆ (δ n m) ⇒ (δ n m) ≡ (δ m n)
,! 6 (()E: 5) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

∀n∀m (δ n m) ≡ (δ m n) ! 8 (∀I: 1,7) ¡

▯

! **11.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ω[n] & ω[m]) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

¬ (δ n m) ≡ ϕ ,! 2 (Prem) ¡

(¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ∃x (δ n m)[x]) ,! 3 (∀E: II5.16) ¡

¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ∃x (δ n m)[x] ,! 4 (()E: 3) ¡

∃x (δ n m)[x] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ n m)[x] ,! 6 (∃E: 5) ¡

((δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m) ,! 7 (∀E: P3) ¡

(δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m ,! 8 (()E: 7) ¡

x|n & x|m ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

x|n ,! 10 (&E: 9) ¡

x|m ,! 11 (&E: 9) ¡

(x|n ⇒ ω[n]) ,! 12 (∀E: C1.4) ¡

x|n ⇒ ω[n] ,! 13 (()E: 12) ¡

ω[n] ,! 14 (⇒E: 10,13) ¡

(x|m ⇒ ω[m]) ,! 15 (∀E: C1.4) ¡

x|m ⇒ ω[m] ,! 16 (()E: 15) ¡

ω[m] ,! 17 (⇒E: 11,16) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 18 (&I: 14,17) ¡

¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ω[n] & ω[m] ,! 19 (⇒I: 2,18) ¡

(¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ω[n] & ω[m]) ,! 20 (()I: 19) ¡

∀n∀m (¬ (δ n m) ≡ ϕ ⇒ ω[n] & ω[m])   ! 21 (∀I: 1,20)   ¡

□

! **12.** 1 is a common divisor of any pair of finite numbers.   ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (δ n m)[1])   ¡

n,**m**   ,! 1 (Prem)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**]   ,! 2 (Prem)   ¡

ω[**n**]   ,! 3 (&E: 2)   ¡

ω[**m**]   ,! 4 (&E: 2)   ¡

(ω[**n**] ⇒ 1|**n**)   ,! 5 (∀E: C1.14)   ¡

ω[**n**] ⇒ 1|**n**   ,! 6 (()E: 5)   ¡

1|**n**   ,! 7 (⇒E: 3,6)   ¡

(ω[**m**] ⇒ 1|**m**)   ,! 8 (∀E: C1.14)   ¡

ω[**m**] ⇒ 1|**m**   ,! 9 (()E: 5)   ¡

1|**m**   ,! 10 (⇒E: 4,9)   ¡

1|**n** & 1|**m**   ,! 11 (&I: 7,10)   ¡

(1|**n** & 1|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[1])   ,! 12 (∀E: P4)   ¡

1|**n** & 1|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[1]   ,! 13 (()E: 12)   ¡

(δ **n** **m**)[1]   ,! 14 (⇒E: 11,13)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (δ **n** **m**)[1]   ,! 15 (⇒I: 2,14)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (δ **n** **m**)[1])   ,! 16 (()I: 15)   ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ (δ n m)[1])   ! 17 (∀I: 1,16)   ¡

□

! **13.**   ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ¬ (δ n m) ≡ ϕ)   ¡

n,**m**   ,! 1 (Prem)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**]   ,! 2 (Prem)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (δ **n** **m**)[1])   ,! 3 (∀E: P12)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ (δ **n** **m**)[1]   ,! 4 (()E: 3)   ¡

(δ **n** **m**)[1] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

∃x (δ **n** **m**)[x] ,! 6 (∃I: 5) ¡

(∃x (δ **n** **m**)[x] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ) ,! 7 (∀E: II5.7) ¡

∃x (δ **n** **m**)[x] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 8 (()E: 7) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] ⇒ ¬ (δ n m) ≡ ϕ) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **14.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ ω[n] ⇒ (δ n m) ≡ ϕ) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 3 (Prem) ¡

(¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 4 (∀E: P11) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 5 (()E: 4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ℑ ,! 8 (ℑI: 2,7) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ⇒ ℑ ,! 9 (⇒I: 3,8) ¡

¬¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 10 (¬I: 9) ¡

(δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 11 (¬E: 10) ¡

¬ ω[**n**] ⇒ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(¬ ω[**n**] ⇒ (δ **n** **m**) ≡ ϕ) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n∀m (¬ ω[n] ⇒ (δ n m) ≡ ϕ) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **15.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ ω[n] ⇒ (δ m n) ≡ ϕ) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(¬ ω[**n**] ⇒ (δ **n** **m**) ≡ ϕ) ,! 3 (∀E: P14) ¡

¬ ω[**n**] ⇒ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) ,! 6 (∀E: P10) ¡

(δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) & (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) & (δ **n** **m**) ≡ ϕ ⇒ (δ **m** **n**) ≡ ϕ)
,! 8 (∀E: II1.19) ¡

(δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) & (δ **n** **m**) ≡ ϕ ⇒ (δ **m** **n**) ≡ ϕ
,! 9 (()E: 8) ¡

(δ **m** **n**) ≡ ϕ ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

¬ ω[**n**] ⇒ (δ **m** **n**) ≡ ϕ ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(¬ ω[**n**] ⇒ (δ **m** **n**) ≡ ϕ) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (¬ ω[n] ⇒ (δ **m** **n**) ≡ ϕ) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **16.** The natural numbers are the common divisors of 0 and 0. ¡

⊢ (δ 0 0) ≡ ω ¡

(δ 0 0) ⊆ ω ! 1 (∀E: P8) ¡

x ,! 2 (Prem) ¡

ω[**x**] ,! 3 (Prem) ¡

(ω[**x**] ⇒ **x**|0) ,! 4 (∀E: C1.11) ¡

ω[**x**] ⇒ **x**|0 ,! 5 (()E: 4) ¡

x|0 ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

x|0 & **x**|0 ,! 7 (&I: 6,6) ¡

(**x**|0 & **x**|0 ⇒ (δ 0 0)[**x**]) ,! 8 (∀E: P4) ¡

x|0 & **x**|0 ⇒ (δ 0 0)[**x**] ,! 9 (()E: 8) ¡

(δ 0 0)[x] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

ω[x] ⇒ (δ 0 0)[x] ,! 11 (⇒I: 3,10) ¡

(ω[x] ⇒ (δ 0 0)[x]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀x (ω[x] ⇒ (δ 0 0)[x]) ,! 13 (∀I: 2,12) ¡

ω ⊆ (δ 0 0) ,! 14 (𝕊I: II1.1,13) ¡

(δ 0 0) ⊆ ω & ω ⊆ (δ 0 0) ,! 15 (&I: 1,14) ¡

((δ 0 0) ⊆ ω & ω ⊆ (δ 0 0) ⇒ (δ 0 0) ≡ ω) ,! 16 (∀E: II1.8) ¡

(δ 0 0) ⊆ ω & ω ⊆ (δ 0 0) ⇒ (δ 0 0) ≡ ω ,! 17 (()E: 16) ¡

(δ 0 0) ≡ ω ! 18 (⇒E: 15,17) ¡

▯

! **17.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ,! 4 (Prem) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n**) ,! 5 (∀E: P5) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ **x**|**n** ,! 6 (()E: 5) ¡

x|**n** ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

((δ **n** **m**)[**x**] ⇒ ω[**x**]) ,! 8 (∀E: P7) ¡

(δ **n** **m**)[**x**] ⇒ ω[**x**] ,! 9 (()E: 8) ¡

ω[**x**] ,! 10 (⇒E: 4,9) ¡

x|**n** & ¬ **n** = 0 ,! 11 (&I: 2,7) ¡

(**x**|**n** & ¬ **n** = 0 ⇒ ¬ **x** = 0) ,! 12 (∀E: C1.13) ¡

x|**n** & ¬ **n** = 0 ⇒ ¬ **x** = 0 ,! 13 (()E: 12) ¡

¬ **x** = 0 ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[**x**] & ¬ **x** = 0 ,! 15 (&I: 10,14) ¡

(ω[x] & ¬ x = 0 ⇒ ≤[1,x]) ,! 16 (∀E: V3.38) ¡

ω[x] & ¬ x = 0 ⇒ ≤[1,x] ,! 17 (()E: 16) ¡

≤[1,x] ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

(x|n & ¬ n = 0 ⇒ ≤[x,n]) ,! 19 (∀E: C1.47) ¡

x|n & ¬ n = 0 ⇒ ≤[x,n] ,! 20 (()E: 19) ¡

≤[x,n] ,! 21 (⇒E: 11,20) ¡

≤[1,x] & ≤[x,n] ,! 22 (&I: 18,21) ¡

(≤[1,x] & ≤[x,n] ⇒ (1 _ n)[x]) ,! 23 (∀E: C2.4) ¡

≤[1,x] & ≤[x,n] ⇒ (1 _ n)[x] ,! 24 (()E: 23) ¡

(1 _ n)[x] ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

(δ n m)[x] ⇒ (1 _ n)[x] ,! 26 (⇒I: 4,25) ¡

((δ n m)[x] ⇒ (1 _ n)[x]) ,! 27 (()I: 26) ¡

∀x ((δ n m)[x] ⇒ (1 _ n)[x]) ,! 28 (∀I: 3,27) ¡

(δ n m) ⊆ (1 _ n) ,! 29 (𝕊I: II1.1,28) ¡

¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n) ,! 30 (⇒I: 2,29) ¡

(¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n)) ,! 31 (()I: 30) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n)) ! 32 (∀I: 1,31) ¡

□

! **18.** ¡

⊢ ∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ (δ m n) ⊆ (1 _ n)) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

¬ n = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n)) ,! 3 (∀E: P17) ¡

¬ n = 0 ⇒ (δ n m) ⊆ (1 _ n) ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ n m) ⊆ (1 _ n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) ,! 6 (∀E: P10) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) & (δ n m) ⊆ (1 _ n) ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) & (δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**)
⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**))
,! 8 (∀E: II1.30) ¡

(δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) & (δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**) ⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**)
,! 9 (()E: 8) ¡

(δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**)) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ (δ m n) ⊆ (1 _ n)) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **19.** ¡

⊦ ∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ *f* (δ n m)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ (δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**)) ,! 3 (∀E: P17) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ (δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**) ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 6 (∀E: C2.62) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ (1 _ **n**) ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 7 (()E: 6) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ *f* (δ n m)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

▯

! **20.** ¡

⊦ ∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ *f* (δ m n)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**)) ,! 3 (∀E: P18) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ (δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ⇒ *f* (δ **m** **n**)) ,! 6 (∀E: C2.62) ¡

(δ **m** **n**) ⊆ (1 _ **n**) ⇒ *f* (δ **m** **n**) ,! 7 (()E: 6) ¡

f (δ **m** **n**) ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **m** **n**) ,! 9 (⇒I: 2,8) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **m** **n**)) ,! 10 (()I: 9) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 ⇒ *f* (δ m n)) ! 11 (∀I: 1,10) ¡

□

! **21.** Common divisors of two numbers, one of which is non-zero, are finite in number. ¡

⊢ ∀n∀m (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0 ⇒ *f* (δ n m)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

¬ **n** = 0 ,! 3 (Prem) ¡

(¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 4 (∀E: P19) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 5 (()E: 4) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 7 (⇒I: 3,6) ¡

¬ **m** = 0 ,! 8 (Prem) ¡

(¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 9 (∀E: P20) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 10 (()E: 9) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 12 (⇒I: 8,11) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 13 (∨E: 2,7,12) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 14 (⇒I: 2,13) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 15 (()I: 14) ¡

∀n∀m (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0 ⇒ *f* (δ n m)) ! 16 (∀I: 1,15) ¡

□

! **22.** ¡

⊦ ∀n∀m (n|m ⇒ (δ n m)[n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n|**m** ,! 2 (Prem) ¡

(**n**|**m** ⇒ ω[**n**]) ,! 3 (∀E: C1.3) ¡

n|**m** ⇒ ω[**n**] ,! 4 (()E: 3) ¡

ω[**n**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(ω[**n**] ⇒ **n**|**n**) ,! 6 (∀E: C1.10) ¡

ω[**n**] ⇒ **n**|**n** ,! 7 (()E: 6) ¡

n|**n** ,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

n|**n** & **n**|**m** ,! 9 (&I: 2,8) ¡

(**n**|**n** & **n**|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**]) ,! 10 (∀E: P4) ¡

n|**n** & **n**|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**] ,! 11 (()E: 10) ¡

(δ **n** **m**)[**n**] ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

n|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**] ,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(**n**|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**]) ,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m (n|m ⇒ (δ n m)[n]) ! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **23.** ¡

⊦ ∀n∀m (n|m ⇒ (δ m n)[n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n|**m** ,! 2 (Prem) ¡

(**n**|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**]) ,! 3 (∀E: P22) ¡

n|**m** ⇒ (δ **n** **m**)[**n**] ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ **n** **m**)[**n**] ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) ,! 6 (∀E: P10) ¡

(δ **n** **m**)[**n**] & (δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) ,! 7 (&I: 5,6) ¡

((δ **n** **m**)[**n**] & (δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**) ⇒ (δ **m** **n**)[**n**])
,! 8 (∀E: II1.35) ¡

(δ n m)[n] & (δ n m) ≡ (δ m n) ⇒ (δ m n)[n]
,! 9 (()E: 8) ¡

(δ m n)[n] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

n|m ⇒ (δ m n)[n] ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(n|m ⇒ (δ m n)[n]) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (n|m ⇒ (δ m n)[n]) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

□

! **24.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (n|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ k m)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

n|k ,! 2 (Prem) ¡

x ,! 3 (Prem) ¡

(δ n m)[x] ,! 4 (Prem) ¡

((δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m) ,! 5 (∀E: P3) ¡

(δ n m)[x] ⇒ x|n & x|m ,! 6 (()E: 5) ¡

x|n & x|m ,! 7 (⇒E: 4,6) ¡

x|n ,! 8 (&E: 7) ¡

x|m ,! 9 (&E: 7) ¡

x|n & n|k ,! 10 (&I: 2,8) ¡

(x|n & n|k ⇒ x|k) ,! 11 (∀E: C1.24) ¡

x|n & n|k ⇒ x|k ,! 12 (()E: 11) ¡

x|k ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

x|k & x|m ,! 14 (&I: 9,13) ¡

(x|k & x|m ⇒ (δ k m)[x]) ,! 15 (∀E: P4) ¡

x|k & x|m ⇒ (δ k m)[x] ,! 16 (()E: 15) ¡

(δ k m)[x] ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(δ n m)[x] ⇒ (δ k m)[x] ,! 18 (⇒I: 4,17) ¡

((δ n m)[x] ⇒ (δ k m)[x]) ,! 19 (()I: 18) ¡

∀x ((δ n m)[x] ⇒ (δ k m)[x]) ,! 20 (∀I: 3,19) ¡

(δ n m) ⊆ (δ k m) ,! 21 (𝕊I: II1.1,20) ¡

n|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ k m) ,! 22 (⇒I: 2,21) ¡

(n|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ k m)) ,! 23 (()I: 22) ¡

∀n∀m∀k (n|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ k m)) ! 24 (∀I: 1,23) ¡

▯

! **25.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (m|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ n k)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

m|k ,! 2 (Prem) ¡

(m|k ⇒ (δ m n) ⊆ (δ k n)) ,! 3 (∀E: P24) ¡

m|k ⇒ (δ m n) ⊆ (δ k n) ,! 4 (()E: 3) ¡

(δ m n) ⊆ (δ k n) ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) ,! 6 (∀E: P10) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) & (δ m n) ⊆ (δ k n),! 7 (&I: 5,6) ¡

((δ n m) ≡ (δ m n) & (δ m n) ⊆ (δ k n)
⇒ (δ n m) ⊆ (δ k n))
,! 8 (∀E: II1.29) ¡

(δ n m) ≡ (δ m n) & (δ m n) ⊆ (δ k n) ⇒ (δ n m) ⊆ (δ k n)
,! 9 (()E: 8) ¡

(δ n m) ⊆ (δ k n) ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(δ k n) ≡ (δ n k) ,! 11 (∀E: P10) ¡

(δ k n) ≡ (δ n k) & (δ n m) ⊆ (δ k n),! 12 (&I: 10,11) ¡

((δ k n) ≡ (δ n k) & (δ n m) ⊆ (δ k n)
⇒ (δ n m) ⊆ (δ n k))
,! 13 (∀E: II1.32) ¡

(δ k n) ≡ (δ n k) & (δ n m) ⊆ (δ k n) ⇒ (δ n m) ⊆ (δ n k)
,! 14 (()E: 13) ¡

(δ n m) ⊆ (δ n k) ,! 15 (⇒E: 12,14) ¡

m|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ n k) ,! 16 (⇒I: 2,15) ¡

(**m**|**k** ⇒ (δ **n** **m**) ⊆ (δ **n** **k**)) ,! 17 (()I: 16) ¡

∀n∀m∀k (m|k ⇒ (δ n m) ⊆ (δ n k)) ! 18 (∀I: 1,17) ¡

▯

! **26.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (δ n m) ⊆ ω & ¬ (δ n m) ≡ ϕ & *f* (δ n m)) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ) ,! 6 (∀E: P13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ⇒ ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 7 (()E: 6) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω ,! 9 (∀E: P8) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 10 (&I: 8,9) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**)) ,! 11 (∀E: P21) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ⇒ *f* (δ **n** **m**) ,! 12 (()E: 11) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 13 (⇒E: 5,12) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
,! 14 (&I: 10,13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**))
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (δ n m) ⊆ ω & ¬ (δ n m) ≡ ϕ & *f* (δ n m))
! 17 (∀I: 1,16) ¡

▯

! **27.** P27 justifies the definition P28. ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ ¬ (ω ∩ (δ n m)) ≡ ϕ & *f* (ω ∩ (δ n m))) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 5 (()E: 4) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**))
,! 6 (∀E: P26) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
,! 7 (()E: 6) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
,! 8 (⇒E: 2,7) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω ,! 9 (&E: 8) ¡

¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ ,! 10 (&E: 8) ¡

f (δ **n** **m**) ,! 11 (&E: 8) ¡

((δ **n** **m**) ⊆ ω ⇒ (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**))
,! 12 (∀E: II3.26) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω ⇒ (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**)
,! 13 (()E: 12) ¡

(ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**) ,! 14 (⇒E: 9,13) ¡

(ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**) & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ
,! 15 (&I: 10,14) ¡

((ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**) & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ
⇒ ¬ (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ ϕ)
,! 16 (∀E: II1.40) ¡

(ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**) & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ
⇒ ¬ (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ ϕ
,! 17 (()E: 16) ¡

¬ (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ ϕ ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

f (δ **n** **m**) & (ω ∩ (δ **n** **m**)) ≡ (δ **n** **m**) ,! 19 (&I: 11,14) ¡

(ƒ (δ **n m**) & (ω ∩ (δ **n m**)) ≡ (δ **n m**)
⇒ ƒ (ω ∩ (δ **n m**)))
,! 20 (∀E: IV5.6) ¡

ƒ (δ **n m**) & (ω ∩ (δ **n m**)) ≡ (δ **n m**) ⇒ ƒ (ω ∩ (δ **n m**))
,! 21 (()E: 20) ¡

ƒ (ω ∩ (δ **n m**)) ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

¬ (ω ∩ (δ **n m**)) ≡ φ & ƒ (ω ∩ (δ **n m**))
,! 23 (&I: 18,22) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ¬ (ω ∩ (δ **n m**)) ≡ φ & ƒ (ω ∩ (δ **n m**))
,! 24 (⇒I: 2,23) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ¬ (ω ∩ (δ **n m**)) ≡ φ & ƒ (ω ∩ (δ **n m**)))
,! 25 (()I: 24) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ ¬ (ω ∩ (δ n m)) ≡ φ & ƒ (ω ∩ (δ n m)))
! 26 (∀I: 1,25) ¡

□

! **28.** ¡

𝔻 Δ ; (**n** Δ **m**) ; ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ;
(χ(δ **n m**))
¡! (𝔻D: C4.3,P27) ¡

! **29.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ ω[(n Δ m)] & (δ n m)[(n Δ m)]
& ∀y ((δ n m)[y] ⇒ ≤[y,(n Δ m)])) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n m**) ≡ φ & ƒ (δ **n m**))
,! 3 (∀E: P26) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (δ **n m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n m**) ≡ φ & ƒ (δ **n m**)
,! 4 (()E: 3) ¡

(δ **n m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n m**) ≡ φ & ƒ (δ **n m**)
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

((δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
⇒ ω[(χ(δ **n** **m**))] & (δ **n** **m**)[(χ(δ **n** **m**))]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(χ(δ **n** **m**))]))
,! 6 (∀E: C4.10) ¡

(δ **n** **m**) ⊆ ω & ¬ (δ **n** **m**) ≡ ϕ & *f* (δ **n** **m**)
⇒ ω[(χ(δ **n** **m**))] & (δ **n** **m**)[(χ(δ **n** **m**))]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(χ(δ **n** **m**))])
,! 7 (()E: 6) ¡

ω[(χ(δ **n** **m**))] & (δ **n** **m**)[(χ(δ **n** **m**))]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(χ(δ **n** **m**))])
,! 8 (⇒E: 5,7) ¡

ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 9 (𝔻I: 8;
(**n** Δ **m**): P28,2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)]))
,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ ω[(n Δ m)] & (δ n m)[(n Δ m)]
& ∀y ((δ n m)[y] ⇒ ≤[y,(n Δ m)]))
! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **30.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ω[(n Δ m)]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)]))
,! 3 (∀E: P29) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]

& ∀y ((δ **n m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[(**n** Δ **m**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ ω[(**n** Δ **m**)]
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ ω[(**n** Δ **m**)])
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ω[(n Δ m)])
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **31.** The gcd is a common divisor. ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)]))
,! 3 (∀E: P29) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 4 (()E: 3) ¡

ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(δ **n m**)[(**n** Δ **m**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

((δ **n m**)[(**n** Δ **m**)] ⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**)
,! 7 (∀E: P3;
(**n** Δ **m**): P28;2) ¡

(δ **n m**)[(**n** Δ **m**)] ⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**
,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m** ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m
,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m)
,! 11 (()I: 10) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m)
! 12 (∀I: 1,11) ¡

□

! **32.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m)
,! 3 (∀E: P31) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m
,! 4 (()E: 3) ¡

(n Δ m)|n & (n Δ m)|m ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(n Δ m)|n ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n)
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|n)
! 9 (∀I: 1,8) ¡

□

! **33.** ¡

⊢ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|m) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 2 (Prem) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|n & (n Δ m)|m)

,! 3 (∀E: P31) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**
,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

(**n** Δ **m**)|**m** ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**m**
,! 7 (⇒I: 2,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**m**)
,! 8 (()I: 7) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|m)
! 9 (∀I: 1,8) ¡

▯

! **34.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n Δ m) = n ⇒ n|m) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** Δ **m**) = **n** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 3 (ⅅP: P28,2) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**m**)
,! 4 (∀E: P33) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**m**
,! 5 (()E: 4) ¡

(**n** Δ **m**)|**m** ,! 6 (⇒E: 3,5) ¡

n|**m** ,! 7 (=E: 2,6) ¡

(**n** Δ **m**) = **n** ⇒ **n**|**m** ,! 8 (⇒I: 2,7) ¡

((**n** Δ **m**) = **n** ⇒ **n**|**m**) ,! 9 (()I: 8) ¡

∀n∀m∀k ((n Δ m) = n ⇒ n|m) ! 10 (∀I: 1,9) ¡

▯

! **35.** ¡

⊦ ∀n∀m∀k ((n Δ m) = m ⇒ m|n) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

(**n** Δ **m**) = **m** ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)   ,! 3 (ⅅP: P28,2)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n**)
,! 4 (∀E: P32)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n**
,! 5 (()E: 4)   ¡

(**n** Δ **m**)|**n**   ,! 6 (⇒E: 3,5)   ¡

m|**n**   ,! 7 (=E: 2,6)   ¡

(**n** Δ **m**) = **m** ⇒ **m**|**n**   ,! 8 (⇒I: 2,7)   ¡

((**n** Δ **m**) = **m** ⇒ **m**|**n**)   ,! 9 (()I: 8)   ¡

∀n∀m∀k ((n Δ m) = m ⇒ m|n)   ! 10 (∀I: 1,9)   ¡

▯

! **36.**   ¡

⊢ ∀n∀m∀a∀b (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ω[a] & ω[b]
⇒ (n Δ m)|((axn) + (bxm)))   ¡

n,**m**,**a**,**b**   ,! 1 (Prem)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & ω[**a**] & ω[**b**]
,! 2 (Prem)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)   ,! 3 (&E: 2)   ¡

ω[**a**] & ω[**b**]   ,! 4 (&E: 2)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**)
,! 5 (∀E: P31)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**
,! 6 (()E: 5)   ¡

(**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**   ,! 7 (⇒E: 4,6)   ¡

(**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m** & ω[**a**] & ω[**b**]   ,! 8 (&I: 4,7)   ¡

((**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m** & ω[**a**] & ω[**b**]
⇒ (**n** Δ **m**)|((**a**x**n**) + (**b**x**m**)))
,! 9 (∀E: C1.29;
(**n** Δ **m**): P28,3)   ¡

(**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m** & ω[**a**] & ω[**b**]
⇒ (**n** Δ **m**)|((**a**x**n**) + (**b**x**m**))
,! 10 (()E: 9)   ¡

(**n** Δ m)|((a x**n**) + (**b**xm))   ,! 11 (⇒E: 8,10)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & ω[**a**] & ω[**b**]
⇒ (**n** Δ m)|((**a**x**n**) + (**b**xm))
,! 12 (⇒I: 2,11)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & ω[**a**] & ω[**b**]
⇒ (**n** Δ m)|((**a**x**n**) + (**b**xm)))
,! 13 (()I: 12)   ¡

∀n∀m∀a∀b (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & ω[a] & ω[b]
⇒ (n Δ m)|((axn) + (bxm)))
! 14 (∀I: 1,13)   ¡

▯

! **37.**   ¡

├ ∀n∀m∀a∀b (≤[(bxm),(axn)] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|((axn) - (bxm)))   ¡

n,**m**,**a**,**b**   ,! 1 (Prem)   ¡

≤[(**b**xm),(**a**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem)   ¡

≤[(**b**xm),(**a**x**n**)]   ,! 3 (&E: 2)   ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)   ,! 4 (&E: 2)   ¡

ω[**b**] & ω[**m**]   ,! 5 (𝕋E: V7.9,3)   ¡

ω[**m**]   ,! 6 (&E: 5)   ¡

ω[**a**] & ω[**n**]   ,! 7 (𝕋E: V7.9,3)   ¡

ω[**n**]   ,! 8 (&E: 7)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**]   ,! 9 (&I: 6,8)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)   ,! 10 (&I: 4,9)   ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**)
,! 11 (∀E: P31)   ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n** & (**n** Δ **m**)|**m**
,! 12 (()E: 11)   ¡

(**n** Δ m)|**n** & (**n** Δ m)|**m**   ,! 13 (⇒E: 10,12)   ¡

(**n** Δ m)|**n** & (**n** Δ m)|**m** & ≤[(**b**xm),(**a**x**n**)]
,! 14 (&I: 3,13)   ¡

((**n** Δ m)|**n** & (**n** Δ m)|**m** & ≤[(**b**xm),(**a**x**n**)]

⇒ (**n** Δ **m**)|((**a**x**n**) - (**b**xm)))
,! 15 (∀E: P30;
(**n** Δ **m**): P28,10) ¡

(**n** Δ m)|**n** & (**n** Δ m)|**m** & ≤[(**b**xm),(**a**x**n**)]
⇒ (**n** Δ m)|((**a**x**n**) - (**b**xm)) ,! 16 (()E: 15) ¡

(**n** Δ m)|((**a**x**n**) - (**b**xm)) ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

≤[(**b**xm),(**a**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ m)|((**a**x**n**) - (**b**xm))
,! 18 (⇒I: 2,17) ¡

(≤[(**b**xm),(**a**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ m)|((**a**x**n**) - (**b**xm)))
,! 19 (()I: 18) ¡

∀n∀m∀a∀b (≤[(bxm),(axn)] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|((axn) - (bxm)))
! 20 (∀I: 1,19) ¡

▯

! **38.** ¡

⊢ ∀n∀m∀t (∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n Δ m)|t) ¡

n,m,**t** ,! 1 (Prem) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
,! 2 (Prem) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dxm)) ,! 3 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 4 (&E: 2) ¡

∃d **t** = ((**c**x**n**) - (dxm)) ,! 5 (∃E: 3) ¡

t = ((**c**x**n**) - (**d**xm)) ,! 6 (∃E: 5) ¡

≤[(**d**xm),(**c**x**n**)] ,! 7 (𝕋E: V5.7,6) ¡

≤[(**d**xm),(**c**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(≤[(**d**xm),(**c**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ m)|((**c**x**n**) - (**d**xm)))
,! 9 (∀E: P37) ¡

≤[(**d**xm),(**c**x**n**)] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ m)|((**c**x**n**) - (**d**xm))
,! 10 (()E: 9) ¡

(**n** ∆ m)|((**cxn**) - (**d**xm)) ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

(**n** ∆ m)|**t** ,! 12 (=E: 6,11) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dxm)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** ∆ **m**)|**t**
,! 13 (⇒I: 2,12) ¡

(∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** ∆ m)|**t**)
,! 14 (()I: 13) ¡

∀n∀m∀t (∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0)
⇒ (n ∆ m)|t)
,! 15 (∀I: 1,14) ¡

▯

! **39.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0 ⇒ ≤[(n ∆ m),n]) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 5 (∨I: 4) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 6 (()I: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** ∆ **m**)|**n**)
,! 8 (∀E: P32) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** ∆ **m**)|**n**
,! 9 (()E: 8) ¡

(**n** ∆ m)|**n** ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(**n** ∆ m)|**n** & ¬ **n** = 0 ,! 11 (&I: 4,10) ¡

((**n** ∆ m)|**n** & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[(**n** ∆ m),**n**])
,! 12 (∀E: C1.47;
(**n** ∆ m): P28,7) ¡

(**n** ∆ m)|**n** & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[(**n** ∆ m),**n**] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(**n** ∆ m),**n**] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[**n**] & ω[m] & ¬ **n** = 0 ⇒ ≤[(**n** ∆ m),**n**] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),n])
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),n])
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **40.** ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m]) ¡

n,m ,! 1 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ m = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0 ,! 5 (∨I: 4) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 6 (()I: 5) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|m)
,! 8 (∀E: P33) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (n Δ m)|m
,! 9 (()E: 8) ¡

(n Δ m)|m ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

(n Δ m)|m & ¬ m = 0 ,! 11 (&I: 4,10) ¡

((n Δ m)|m & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m])
,! 12 (∀E: C1.47;
(n Δ m): P28,7) ¡

(n Δ m)|m & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m] ,! 13 (()E: 12) ¡

≤[(n Δ m),m] ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m] ,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m])
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ m = 0 ⇒ ≤[(n Δ m),m])
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **41.** The gcd is greater (or equal to) any common divisor. ¡

⊦ ∀n∀m∀y (y|n & y|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ≤[y,(n Δ m)]) ¡

n,m,**y** ,! 1 (Prem) ¡

y|**n** & **y**|**m** & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 2 (Prem) ¡

y|**n** ,! 3 (&E: 2) ¡

y|m ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 5 (&E: 2) ¡

(**y**|**n** ⇒ ω[**n**]) ,! 6 (∀E: C1.4) ¡

y|**n** ⇒ ω[**n**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**y**|**m** ⇒ ω[**m**]) ,! 9 (∀E: C1.4) ¡

y|**m** ⇒ ω[**m**] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[**m**] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 13 (&I: 2,12) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)]))
,! 14 (∀E: P29) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 15 (()E: 14) ¡

ω[(**n** Δ **m**)] & (δ **n** **m**)[(**n** Δ **m**)]
& ∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)])
,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

∀y ((δ **n** **m**)[y] ⇒ ≤[y,(**n** Δ **m**)]) ,! 17 (&E: 16) ¡

((δ **n** **m**)[**y**] ⇒ ≤[**y**,(**n** Δ **m**)]) ,! 18 (∀E: 17) ¡

(δ **n** **m**)[**y**] ⇒ ≤[**y**,(**n** Δ **m**)] ,! 19 (()E: 18) ¡

y|**n** & **y**|m ,! 20 (&I: 3,4) ¡

(**y**|**n** & **y**|m ⇒ (δ **n** **m**)[**y**]) ,! 21 (∀E: P4) ¡

$\mathbf{y}|\mathbf{n}\ \&\ \mathbf{y}|\mathbf{m} \Rightarrow (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})[\mathbf{y}]$,! 22 (()E: 21) ¡

$(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})[\mathbf{y}]$,! 23 (⇒E: 20,22) ¡

$\leq[\mathbf{y},(\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})]$,! 24 (⇒E: 19,23) ¡

$\mathbf{y}|\mathbf{n}\ \&\ \mathbf{y}|\mathbf{m}\ \&\ (\neg\ \mathbf{n} = 0 \vee \neg\ \mathbf{m} = 0) \Rightarrow \leq[\mathbf{y},(\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})]$
,! 25 (⇒I: 2,24) ¡

$(\ \mathbf{y}|\mathbf{n}\ \&\ \mathbf{y}|\mathbf{m}\ \&\ (\neg\ \mathbf{n} = 0 \vee \neg\ \mathbf{m} = 0) \Rightarrow \leq[\mathbf{y},(\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})]\ )$
,! 26 (()I: 25) ¡

$\forall n \forall m \forall y\ (\ y|n\ \&\ y|m\ \&\ (\neg\ n = 0 \vee \neg\ m = 0) \Rightarrow \leq[y,(n\ \Delta\ m)]\ )$
! 27 (∀I: 1,26) ¡

□

! **42.** Symmetry of gcd. ¡

$\vdash \forall n \forall m\ (\ \omega[n]\ \&\ \omega[m]\ \&\ (\neg\ n = 0 \vee \neg\ m = 0) \Rightarrow (m\ \Delta\ n) = (n\ \Delta\ m)\ )$
¡

$\mathbf{n},\mathbf{m}$,! 1 (Prem) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{n} = 0 \vee \neg\ \mathbf{m} = 0)$,! 2 (Prem) ¡

$(\ \omega[\mathbf{n}]\ \&\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{n} = 0 \vee \neg\ \mathbf{m} = 0)$
$\Rightarrow \neg\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) \equiv \phi\ \&\ f\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}))\ )$
,! 3 (∀E: P27) ¡

$\omega[\mathbf{n}]\ \&\ \omega[\mathbf{m}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{n} = 0 \vee \neg\ \mathbf{m} = 0)$
$\Rightarrow \neg\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) \equiv \phi\ \&\ f\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}))$
,! 4 (()E: 3) ¡

$\neg\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) \equiv \phi\ \&\ f\ (\omega \cap (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}))$
,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

$(\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) = (\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}))$,! 6 (=I;
$(\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}))$: C4.3,5) ¡

$(\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) = (\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})$,! 7 (𝔻I: 6;
$(\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})$: P28,2) ¡

$(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}) \equiv (\delta\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})$,! 8 (∀E: P10) ¡

$(\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) = (\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})\ \&\ (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}) \equiv (\delta\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})$
,! 9 (&I: 7,8) ¡

$(\ (\chi(\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m})) = (\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})\ \&\ (\delta\ \mathbf{n}\ \mathbf{m}) \equiv (\delta\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})$
$\Rightarrow (\chi(\delta\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})) = (\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})\ )$
,! 10 (∀E: C4.18;
$(\mathbf{n}\ \Delta\ \mathbf{m})$: P28,2) ¡

(χ(δ **n** **m**)) = (**n** Δ **m**) & (δ **n** **m**) ≡ (δ **m** **n**)
⇒ (χ(δ **m** **n**)) = (**n** Δ **m**)
,! 11 (()E: 10) ¡

(χ(δ **m** **n**)) = (**n** Δ **m**) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

! To show: ω[**m**] & ω[**n**] & (¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ¡

ω[**n**] ,! 13 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 14 (&E: 2) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 15 (&E: 2) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] ,! 16 (&I: 13,14) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 17 (()E: 15) ¡

¬ **n** = 0 ,! 18 (Prem) ¡

¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 19 (∨I: 18) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 20 (⇒I: 18,19) ¡

¬ **m** = 0 ,! 21 (Prem) ¡

¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 22 (∨I: 21) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 23 (⇒I: 21,22) ¡

¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0 ,! 24 (∨E: 17,20,23)
¡

(¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ,! 25 (()I: 24) ¡

ω[**m**] & ω[**n**] & (¬ **m** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ,! 26 (&I: 16,25) ¡

(**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**) ,! 27 (ⅅI: 26;
(**m** Δ **n**): P28,12)
¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**)
,! 28 (⇒I: 2,27) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**))
,! 29 (()I: 28) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (m Δ n) = (n Δ m))
! 30 (∀I: 1,29) ¡

□

! **43.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k|n & k|m & ≤[(n Δ m),k] ⇒ (n Δ m) = k) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

k|n & k|m & ≤[(n ∆ m),k] ,! 2 (Prem) ¡

k|n & k|m ,! 3 (&E: 2) ¡

≤[(n ∆ m),k] ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 5 (ⅅP: P28,4) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 6 (&E: 5) ¡

k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 7 (&I: 3,6) ¡

(k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ≤[k,(n ∆ m)])
,! 8 (∀E: P41) ¡

k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ ≤[k,(n ∆ m)]
,! 9 (()E: 8) ¡

≤[k,(n ∆ m)] ,! 10 (⇒E: 7,9) ¡

≤[(n ∆ m),k] & ≤[k,(n ∆ m)] ,! 11 (&I: 4,10) ¡

(≤[(n ∆ m),k] & ≤[k,(n ∆ m)] ⇒ (n ∆ m) = k)
,! 12 (∀E: V3.22;
(n ∆ m): P28,5) ¡

≤[(n ∆ m),k] & ≤[k,(n ∆ m)] ⇒ (n ∆ m) = k
,! 13 (()E: 12) ¡

(n ∆ m) = k ,! 14 (⇒E: 11,13) ¡

k|n & k|m & ≤[(n ∆ m),k] ⇒ (n ∆ m) = k
,! 15 (⇒I: 2,14) ¡

(k|n & k|m & ≤[(n ∆ m),k] ⇒ (n ∆ m) = k)
,! 16 (()I: 15) ¡

∀n∀m∀k (k|n & k|m & ≤[(n ∆ m),k] ⇒ (n ∆ m) = k)
! 17 (∀I: 1,16) ¡

□

! **44.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k|n & k|m & (n ∆ m)|k ⇒ (n ∆ m) = k) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

k|n & k|m & (n ∆ m)|k ,! 2 (Prem) ¡

k|n & k|m ,! 3 (&E: 2) ¡

k|**n** ,! 4 (&E: 2) ¡

k|**m** ,! 5 (&E: 2) ¡

(**n** ∆ **m**)|**k** ,! 6 (&E: 2) ¡

! Lines 7 through 10 are necessary for the application of 𝔻P on line 11. ¡

∃x ((**n** ∆ **m**) x x) = **k** ,! 7 (𝕊E: C1.1,5) ¡

((**n** ∆ **m**) x **x**) = **k** ,! 8 (∃E: 7) ¡

ω[(**n** ∆ **m**)] & ω[**x**] ,! 9 (𝕋E: V7.9,8) ¡

ω[(**n** ∆ **m**)] ,! 10 (&E: 9) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 11 (𝔻P: P28,10) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 12 (&E: 11) ¡

! To show: ¬ **k** = 0. Proceed by contradiction. ¡

k = 0 ,! 13 (Prem) ¡

0|**n** ,! 14 (=E: 4,13) ¡

(0|**n** ⇒ **n** = 0) ,! 15 (∀E: C1.12) ¡

0|**n** ⇒ **n** = 0 ,! 16 (()E: 15) ¡

n = 0 ,! 17 (⇒E: 14,16) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **n** = 0 ,! 18 (&I: 12,17) ¡

((¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **n** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0)
,! 19 (∀E: I3.7) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) & **n** = 0 ⇒ ¬ **m** = 0
,! 20 (()E: 19) ¡

¬ **m** = 0 ,! 21 (⇒E: 18,20) ¡

0|**m** ,! 22 (=E: 5,13) ¡

(0|**m** ⇒ **m** = 0) ,! 23 (∀E: C1.12) ¡

0|**m** ⇒ **m** = 0 ,! 24 (()E: 23) ¡

m = 0 ,! 25 (⇒E: 22,24) ¡

𝔉 ,! 26 (𝔉I: 21,25) ¡

k = 0 ⇒ 𝔉 ,! 27 (⇒I: 13,26) ¡

¬ **k** = 0 ,! 28 (¬I: 27) ¡

(**n** ∆ m)|**k** & ¬ **k** = 0 ,! 29 (&I: 6,28) ¡

((**n** ∆ m)|**k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[(**n** ∆ m),**k**])
,! 30 (∀E: C1.47;
(**n** ∆ m): P28,11) ¡

(**n** ∆ m)|**k** & ¬ **k** = 0 ⇒ ≤[(**n** ∆ m),**k**] ,! 31 (()E: 30) ¡

≤[(**n** ∆ m),**k**] ,! 32 (⇒E: 29,31) ¡

k|**n** & **k**|m & ≤[(**n** ∆ m),**k**] ,! 33 (&I: 3,32) ¡

(**k**|**n** & **k**|m & ≤[(**n** ∆ m),**k**] ⇒ (**n** ∆ m) = **k**)
,! 34 (∀E: P43) ¡

k|**n** & **k**|m & ≤[(**n** ∆ m),**k**] ⇒ (**n** ∆ m) = **k**
,! 35 (()E: 34) ¡

(**n** ∆ m) = **k** ,! 36 (⇒E: 33,35) ¡

k|**n** & **k**|m & (**n** ∆ m)|**k** ⇒ (**n** ∆ m) = **k**
,! 37 (⇒I: 2,36) ¡

(**k**|**n** & **k**|m & (**n** ∆ m)|**k** ⇒ (**n** ∆ m) = **k**)
,! 38 (()I: 37) ¡

∀n∀m∀k (k|n & k|m & (n ∆ m)|k ⇒ (n ∆ m) = k)
! 39 (∀I: 1,38) ¡

□

! **45.** ¡

⊢ ∀n∀m (n|m & ¬ n = 0 ⇒ (n ∆ m) = n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

n|**m** ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(**n**|**m** ⇒ ω[**n**] & ω[**m**]) ,! 5 (∀E: C1.2) ¡

n|**m** ⇒ ω[**n**] & ω[**m**] ,! 6 (()E: 5) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (&E: 7) ¡

(ω[**n**] ⇒ **n**|**n**) ,! 9 (∀E: C1.10) ¡

ω[**n**] ⇒ **n**|**n** ,! 10 (()E: 9) ¡

n|**n** ,! 11 (⇒E: 8,20) ¡

n|**n** & **n**|m ,! 12 (&I: 3,11) ¡

¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 13 (∨I: 4) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 14 (()I: 13) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 15 (&I: 7,14) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n**)
,! 16 (∀E: P32) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**n** Δ **m**)|**n**
,! 17 (()E: 16) ¡

(**n** Δ **m**)|**n** ,! 18 (⇒E: 15,17) ¡

n|**n** & **n**|**m** & (**n** Δ **m**)|**n** ,! 19 (&I: 12,18) ¡

(**n**|**n** & **n**|**m** & (**n** Δ **m**)|**n** ⇒ (**n** Δ **m**) = **n**)
,! 20 (∀E: P44) ¡

n|**n** & **n**|**m** & (**n** Δ **m**)|**n** ⇒ (**n** Δ **m**) = **n**,! 21 (()E: 20) ¡

(**n** Δ **m**) = **n** ,! 22 (⇒E: 19,21) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ **m**) = **n** ,! 23 (⇒I: 2,22) ¡

(**n**|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ **m**) = **n**) ,! 24 (()I: 23) ¡

∀n∀m (n|m & ¬ n = 0 ⇒ (n Δ m) = n) ! 25 (∀I: 1,24) ¡

□

! **46.** ¡

⊢ ∀n∀m (n|m & ¬ n = 0 ⇒ (m Δ n) = n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(**n**|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ **m**) = **n**) ,! 3 (∀E: P45) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ **m**) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** Δ **m**) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 6 (DP: P28,5) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**))
,! 7 (∀E: P42) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**)
,! 8 (()E: 7) ¡

(**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(**m** Δ **n**) = **n** ,! 10 (=E: 5,9) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**m** Δ **n**) = **n** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(**n**|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**m** Δ **n**) = **n**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n∀m (n|m & ¬ n = 0 ⇒ (m Δ n) = n) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **47.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ (n Δ 0) = n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 4 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ **n**|0) ,! 5 (∀E: C1.11) ¡

ω[**n**] ⇒ **n**|0 ,! 6 (()E: 5) ¡

n|0 ,! 7 (⇒E: 3,6) ¡

n|0 & ¬ **n** = 0 ,! 8 (&I: 4,7) ¡

(**n**|0 & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n**) ,! 9 (∀E: P45) ¡

n|0 & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n** ,! 10 (()E: 9) ¡

(**n** Δ 0) = **n** ,! 11 (⇒E: 8,10) ¡

n|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n** ,! 12 (⇒I: 2,11) ¡

(**n**|**m** & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n**) ,! 13 (()I: 12) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ (n Δ 0) = n) ! 14 (∀I: 1,13) ¡

▯

! **48.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ (0 Δ n) = n) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n**) ,! 3 (∀E: P47) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n** ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** Δ 0) = **n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[0] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 0 = 0) ,! 6 (DP: P28,5) ¡

(ω[**n**] & ω[0] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 0 = 0) ⇒ (0 Δ **n**) = (**n** Δ 0)) ,! 7 (∀E: P42) ¡

ω[**n**] & ω[0] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 0 = 0) ⇒ (0 Δ **n**) = (**n** Δ 0) ,! 8 (()E: 7) ¡

(0 Δ **n**) = (**n** Δ 0) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(0 Δ **n**) = **n** ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (0 Δ **n**) = **n** ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (0 Δ **n**) = **n**) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n (ω[n] & ¬ n = 0 ⇒ (0 Δ n) = n) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **49.** ¡

⊢ ∀n (ω[n] ⇒ (n Δ 1) = 1) ¡

n ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ 1|**n**) ,! 3 (∀E: C1.14) ¡

ω[**n**] ⇒ 1|**n** ,! 4 (()E: 3) ¡

1|**n** ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

1|**n** & ¬ 1 = 0 ,! 6 (&I: IV9.6) ¡

(1|**n** & ¬ 1 = 0 ⇒ (**n** Δ 1) = 1) ,! 7 (∀E: P46) ¡

1|**n** & ¬ 1 = 0 ⇒ (**n** Δ 1) = 1 ,! 8 (()E: 7) ¡

(**n** Δ 1) = 1 ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** Δ 1) = 1 ,! 10 (⇒I: 2,9) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** Δ 1) = 1) ,! 11 (()I: 10) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (n Δ 1) = 1) ! 12 (∀I: 1,11) ¡

▯

! **50.** ¡

⊦ ∀n (ω[n] ⇒ (1 ∆ n) = 1) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 2 (Prem) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** ∆ 1) = 1) ,! 3 (∀E: P49) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** ∆ 1) = 1 ,! 4 (()E: 3) ¡

(**n** ∆ 1) = 1 ,! 5 (⇒E: 2,4) ¡

ω[**n**] & ω[1] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 1 = 0) ,! 6 (𝔻P: P28,5) ¡

(ω[**n**] & ω[1] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 1 = 0) ⇒ (1 ∆ **n**) = (**n** ∆ 1))
,! 7 (∀E: P42) ¡

ω[**n**] & ω[1] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ 1 = 0) ⇒ (1 ∆ **n**) = (**n** ∆ 1)
,! 8 (()E: 7) ¡

(1 ∆ **n**) = (**n** ∆ 1) ,! 9 (⇒E: 6,8) ¡

(1 ∆ **n**) = 1 ,! 10 (=E: 5,9) ¡

ω[**n**] ⇒ (1 ∆ **n**) = 1 ,! 11 (⇒I: 2,10) ¡

(ω[**n**] ⇒ (1 ∆ **n**) = 1) ,! 12 (()I: 11) ¡

∀n (ω[n] ⇒ (1 ∆ n) = 1) ! 13 (∀I: 1,12) ¡

▯

! **51.** P51 is extremely important, as Euclid's Lemma (P55) relies on it. ¡

⊦ ∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0
⇒ ∃c∃d (n ∆ m) = ((cxn) - (dxm))) ¡

n,**m** ,! 1 (Prem) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

ω[**n**] ,! 3 (&E: 2) ¡

ω[**m**] ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 5 (&E: 2) ¡

(ω[**n**] ⇒ (1x**n**) = **n**) ,! 6 (∀E: V8.14) ¡

ω[**n**] ⇒ (1x**n**) = **n** ,! 7 (()E: 6) ¡

(1x**n**) = **n** ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(ω[**m**] ⇒ (0x**m**) = 0) ,! 9 (∀E: V8.3) ¡

ω[**m**] ⇒ (0x**m**) = 0 ,! 10 (()E: 9) ¡

(0x**m**) = 0 ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

(ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n**) ,! 12 (∀E: V6.25) ¡

ω[**n**] ⇒ (**n** - 0) = **n** ,! 13 (()E: 12) ¡

(**n** - 0) = **n** ,! 14 (⇒E: 3,13) ¡

n = **n** ,! 15 (=I) ¡

n = (**n** - 0) ,! 16 (=E: 14,15) ¡

n = ((1x**n**) - 0) ,! 17 (=E: 8,16) ¡

n = ((1x**n**) - (0x**m**)) ,! 18 (=E: 11,17) ¡

∃d **n** = ((1x**n**) - (dx**m**)) ,! 19 (∃I: 18) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 20 (∃I: 19) ¡

! Two cases: **m** = 0 or ¬ **m** = 0 ¡

(**m** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 21 (∀E: I3.4) ¡

m = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 22 (()E: 21) ¡

  m = 0 ,! 23 (Prem) ¡

  ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ,! 24 (&I: 3,5) ¡

  (ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n**) ,! 25 (∀E: P47) ¡

  ω[**n**] & ¬ **n** = 0 ⇒ (**n** Δ 0) = **n** ,! 26 (()E: 25) ¡

  (**n** Δ 0) = **n** ,! 27 (⇒E: 24,26) ¡

  (**n** Δ **m**) = **n** ,! 28 (=E: 23,27) ¡

  ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 29 (=E: 20,28) ¡

m = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 30 (⇒I: 23,29) ¡

  ¬ **m** = 0 ,! 31 (Prem) ¡

  ω[**n**] & ω[**m**] ,! 32 (&I: 3,4) ¡

  ¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0 ,! 33 (∨I: 31) ¡

(¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 34 (()I: 33) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 35 (&I: 32,34) ¡

! We introduce here a predicate **T**. It will be shown that (μ**T**) exists and equals (**n** Δ **m**). The definition of **T** then produces the desired conclusion. ¡

∀x ({a : ∃c∃d a = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ a = 0}[x]
⇔ ∃c∃d x = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ x = 0)
,! 36 (Pred) ¡

∃T∀x (T[x] ⇔ ∃c∃d x = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ x = 0)
,! 37 (∃I: 36) ¡

∀x (**T**[x] ⇔ ∃c∃d x = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ x = 0)
,! 38 (∃E: 37) ¡

! To prove: ¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ ¡

(**T**[**n**] ⇔ ∃c∃d **n** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **n** = 0)
,! 39 (∀E: 38) ¡

T[**n**] ⇔ ∃c∃d **n** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **n** = 0
,! 40 (()E: 39) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **n** = 0 ,! 41 (&I: 5,20) ¡

∃c∃d **n** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **n** = 0 ⇒ **T**[**n**]
,! 42 (⇔E: 40) ¡

T[**n**] ,! 43 (⇒E: 41,42) ¡

ω[**n**] & **T**[**n**] ,! 44 (&I: 3,43) ¡

(ω[**n**] & **T**[**n**]) ,! 45 (()I: 44) ¡

∃x(ω[x] & **T**[x]) ,! 46 (∃I: 45) ¡

(∃x(ω[x] & **T**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ)
,! 47 (∀E: II5.26) ¡

∃x(ω[x] & **T**[x]) ⇒ ¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ ,! 48 (()E: 47) ¡

¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

! Hence (μ**T**), presently abbreviated as **t**, exists. ¡

(¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ
⇒ ω[(μ**T**)] & **T**[(μ**T**)] & ∀y (ω[y] & **T**[y] ⇒ ≤[(μ**T**),y]))
,! 50 (∀E: C3.4) ¡

∃t (¬ (ω ∩ **T**) ≡ φ

⇒ ω[t] & T[t] & ∀y (ω[y] & T[y] ⇒ ≤[t,y]))
,! 51 (∃I: 50;
(μT): C3.3,49) ¡

(¬ (ω ∩ T) ≡ ϕ
⇒ ω[t] & T[t] & ∀y (ω[y] & T[y] ⇒ ≤[t,y]))
,! 52 (∃E: 51) ¡

¬ (ω ∩ T) ≡ ϕ
⇒ ω[t] & T[t] & ∀y (ω[y] & T[y] ⇒ ≤[t,y])
,! 53 (()E: 52) ¡

ω[t] & T[t] & ∀y (ω[y] & T[y] ⇒ ≤[t,y])
,! 54 (⇒E: 49,53) ¡

ω[t] ,! 55 (&E: 54) ¡

T[t] ,! 56 (&E: 54) ¡

∀y (ω[y] & T[y] ⇒ ≤[t,y]) ,! 57 (&E: 54) ¡

(T[t] ⇔ ∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & ¬ t = 0)
,! 58 (∀E: 38) ¡

T[t] ⇔ ∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & ¬ t = 0
,! 59 (()E: 58) ¡

T[t] ⇒ ∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & ¬ t = 0
,! 60 (⇔E: 59) ¡

∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) & ¬ t = 0 ,! 61 (⇒E: 56,60) ¡

∃c∃d t = ((cxn) - (dxm)) ,! 62 (&E: 61) ¡

¬ t = 0 ,! 63 (&E: 61) ¡

ω[t] & ¬ t = 0 ,! 64 (&I: 55,63) ¡

! Our objective is to prove (n Δ m) = t. ¡

(t|n & t|m & (n Δ m)|t ⇒ (n Δ m) = t)
,! 65 (∀E: P44) ¡

t|n & t|m & (n Δ m)|t ⇒ (n Δ m) = t
,! 66 (()E: 65) ¡

! Hence it suffices to prove: t|n & t|m & (n Δ m)|t. ¡

! To prove: t|n ¡

ω[n] & ω[t] & ¬ t = 0 ,! 67 (&I: 3,64) ¡

(ω[n] & ω[t] & ¬ t = 0

⇒ ∃q∃r (**n** = ((qx**t**) + r) & <[r,**t**]))
,! 68 (∀E: V8.66) ¡

ω[**n**] & ω[**t**] & ¬ **t** = 0
⇒ ∃q∃r (**n** = ((qx**t**) + r) & <[r,**t**])
,! 69 (()E: 68) ¡

∃q∃r (**n** = ((qx**t**) + r) & <[r,**t**]) ,! 70 (⇒E: 67,69) ¡

∃r (**n** = ((**q**x**t**) + r) & <[r,**t**]) ,! 71 (∃E: 70) ¡

(**n** = ((**q**x**t**) + **r**) & <[**r**,**t**]) ,! 72 (∃E: 71) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) & <[**r**,**t**] ,! 73 (()E: 72) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) ,! 74 (&E: 73) ¡

<[**r**,**t**] ,! 75 (&E: 73) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **m** = 0 ,! 76 (&I: 20,31) ¡

(∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **m** = 0
⇒ ∃c∃d **t** = ((cx**m**) - (dx**n**)))
,! 77 (∀E: V8.69) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **m** = 0
⇒ ∃c∃d **t** = ((cx**m**) - (dx**n**))
,! 78 (()E: 77) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**m**) - (dx**n**)) ,! 79 (⇒E: 76,78) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**) - (dx**n**))
,! 80 (&I: 74,79) ¡

(**n** = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**))
⇒ ∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**)))
,! 81 (∀E: V8.70) ¡

n = ((**q**x**t**) + **r**) & ∃c∃d **t** = ((cx**m**)-(dx**n**))
⇒ ∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 82 (()E: 81) ¡

∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 83 (⇒E: 80,82) ¡

¬ **r** = 0 ,! 84 (Prem) ¡

∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **r** = 0
,! 85 (&I: 83,84) ¡

(**T**[**r**] ⇔ ∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **r** = 0)
,! 86 (∀E: 38) ¡

T[**r**] ⇔ ∃c∃d **r** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **r** = 0
,! 87 (()E: 86) ¡

```
    ∃c∃d r = ((cxn) - (dxm)) & ¬ r = 0 ⇒ T[r]
                                         ,! 88 (⇔E: 87)        ¡

    T[r]                                 ,! 89 (⇒E: 85,88)     ¡

    ω[(qxt)] & ω[r]                      ,! 90 (𝕋E: V1.7,74)  ¡

    ω[r]                                 ,! 91 (&E: 90)        ¡

    ω[r] & T[r]                          ,! 92 (&I: 89,91)     ¡

    (ω[r] & T[r] ⇒ ≤[t,r])               ,! 93 (∀E: 57)        ¡

    ω[r] & T[r] ⇒ ≤[t,r]                 ,! 94 (()E: 93)       ¡

    ≤[t,r]                               ,! 95 (⇒E: 92,94)     ¡

    <[r,t] & ≤[t,r]                      ,! 96 (&I: 75,95)     ¡

    ( <[r,t] & ≤[t,r] ⇒ ℑ )              ,! 97 (∀E: V4.19)     ¡

    <[r,t] & ≤[t,r] ⇒ ℑ                  ,! 98 (()E: 97)       ¡

    ℑ                                    ,! 99 (⇒E: 96,98)     ¡

  ¬ r = 0 ⇒ ℑ                            ,! 100 (⇒I: 84,99)    ¡

  ¬¬ r = 0                               ,! 101 (¬I: 100)      ¡

  r = 0                                  ,! 102 (¬E: 101)      ¡

  n = ((qxt) + r) & r = 0                ,! 103 (&I: 74,102)   ¡

  ( n = ((qxt) + r) & r = 0 ⇒ t|n )      ,! 104 (∀E: C1.51)    ¡

  n = ((qxt) + r) & r = 0 ⇒ t|n          ,! 105 (()E: 104)     ¡

  t|n                                    ,! 106 (⇒E: 103,105)
                                                               ¡

! To prove: t|m.  The proof follows the lines of that of t|n.
                                                               ¡

  ω[m] & ω[t] & ¬ t = 0                  ,! 107 (&I: 4,64)     ¡

  ( ω[m] & ω[t] & ¬ t = 0
    ⇒ ∃q∃r ( m = ((qxt) + r) & <[r,t] ) )
                                         ,! 108 (∀E: V8.66)    ¡

  ω[m] & ω[t] & ¬ t = 0
  ⇒ ∃q∃r ( m = ((qxt) + r) & <[r,t] )
                                         ,! 109 (()E: 108)     ¡

  ∃q∃r ( m = ((qxt) + r) & <[r,t] )      ,! 110 (⇒E: 107,109)
```

¡

∃r (**m** = ((**u**x**t**) + r) & <[r,**t**]) ,! 111 (∃E: 110) ¡

(**m** = ((**u**x**t**) + **v**) & <[**v**,**t**]) ,! 112 (∃E: 111) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) & <[**v**,**t**] ,! 113 (()E: 112) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) ,! 114 (&E: 113) ¡

<[**v**,**t**] ,! 115 (&E: 113) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) & ∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 116 (&I: 62,114) ¡

(**m** = ((**u**x**t**) + **v**) & ∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**))
⇒ ∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**)))
,! 117 (∀E: V8.70) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) & ∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**))
⇒ ∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**))
,! 118 (()E: 117) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**)) ,! 119 (⇒E: 116,118) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**)) & ¬ **n** = 0 ,! 120 (&I: 5,119) ¡

(∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**)) & ¬ **n** = 0
⇒ ∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)))
,! 121 (∀E: V8.69) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**m**) - (dx**n**)) & ¬ **n** = 0
⇒ ∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 122 (()E: 121) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 123 (⇒E: 120,122) ¡

¬ **v** = 0 ,! 124 (Prem) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **v** = 0
,! 125 (&I: 123,124) ¡

(**T**[**v**] ⇔ ∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **v** = 0)
,! 126 (∀E: 38) ¡

T[**v**] ⇔ ∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **v** = 0
,! 127 (()E: 126) ¡

∃c∃d **v** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & ¬ **v** = 0 ⇒ **T**[**v**]
,! 128 (⇔E: 127) ¡

T[**v**] ,! 129 (⇒E: 125,128)

¡

ω[(**u**x**t**)] & ω[**v**] ,! 130 (𝕋E: V1.7,114)

¡

ω[**v**] ,! 131 (&E: 130) ¡

ω[**v**] & **T**[**v**] ,! 132 (&I: 129,131)

¡

(ω[**v**] & **T**[**v**] ⇒ ≤[**t**,**v**]) ,! 133 (∀E: 57) ¡

ω[**v**] & **T**[**v**] ⇒ ≤[**t**,**v**] ,! 134 (()E: 133) ¡

≤[**t**,**v**] ,! 135 (⇒E: 132,134)

¡

<[**v**,**t**] & ≤[**t**,**v**] ,! 136 (&I: 115,135)

¡

(<[**v**,**t**] & ≤[**t**,**v**] ⇒ ℑ) ,! 137 (∀E: V4.19) ¡

<[**v**,**t**] & ≤[**t**,**v**] ⇒ ℑ ,! 138 (()E: 137) ¡

ℑ ,! 139 (⇒E: 136,138)

¡

¬ **v** = 0 ⇒ ℑ ,! 140 (⇒I: 124,139)

¡

¬¬ **v** = 0 ,! 141 (¬I: 140) ¡

v = 0 ,! 142 (¬E: 141) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) & **v** = 0 ,! 143 (&I: 114,142)

¡

(**m** = ((**u**x**t**) + **v**) & **v** = 0 ⇒ **t**|**m**) ,! 144 (∀E: C1.51) ¡

m = ((**u**x**t**) + **v**) & **v** = 0 ⇒ **t**|**m** ,! 145 (()E: 144) ¡

t|**m** ,! 146 (⇒E: 143,145)

¡

t|**n** & **t**|**m** ,! 147 (&I: 106,146)

¡

! To prove: (**n** Δ **m**)|**t** ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
,! 148 (&I: 21,62) ¡

(∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)
⇒ (**n** Δ **m**)|**t**)
,! 149 (∀E: P38) ¡

∃c∃d **t** = ((cx**n**) - (dx**m**)) & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0)

⇒ (**n** Δ m)|**t**
,! 150 (()E: 149) ¡

(**n** Δ m)|**t** ,! 151 (⇒E: 148,150) ¡

t|**n** & **t**|m & (**n** Δ m)|**t** ,! 152 (&I: 147,151) ¡

! Conclusion. ¡

(**n** Δ m) = **t** ,! 153 (⇒E: 66,152) ¡

∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dxm)) ,! 154 (=E: 62,153) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dxm))
,! 155 (⇒I: 31,154) ¡

∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dxm)) ,! 156 (∨E: 22,30,155) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 157 (⇒I: 2,156) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**)))
,! 158 (()I: 157) ¡

∀n∀m (ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0 ⇒ ∃c∃d (n Δ m) = ((cxn) - (dxm)))
! 159 (∀I: 1,158) ¡

▯

! **52.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m)) ¡

n,m,**k** ,! 1 (Prem) ¡

k|**n** & **k**|m & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

k|**n** ,! 3 (&E: 2) ¡

k|m ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 5 (&E: 2) ¡

(**k**|**n** ⇒ ω[**n**]) ,! 6 (∀E: C1.4) ¡

k|**n** ⇒ ω[**n**] ,! 7 (()E: 6) ¡

ω[**n**] ,! 8 (⇒E: 3,7) ¡

(**k**|m ⇒ ω[**m**]) ,! 9 (∀E: C1.4) ¡

k|m ⇒ ω[m] ,! 10 (()E: 9) ¡

ω[m] ,! 11 (⇒E: 4,10) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 12 (&I: 8,11) ¡

ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0 ,! 13 (&I: 5,12) ¡

(ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0
⇒ ∃c∃d (n Δ m) = ((cxn) - (dxm)))
,! 14 (∀E: P51) ¡

ω[n] & ω[m] & ¬ n = 0
⇒ ∃c∃d (n Δ m) = ((cxn) - (dxm))
,! 15 (()E: 14) ¡

∃c∃d (n Δ m) = ((cxn) - (dxm)) ,! 16 (⇒E: 13,15) ¡

∃d (n Δ m) = ((cxn) - (dxm)) ,! 17 (∃E: 16) ¡

(n Δ m) = ((cxn) - (dxm)) ,! 18 (∃E: 17) ¡

≤[(dxm),(cxn)] ,! 19 (𝕋E: V5.7,18) ¡

k|n & k|m ,! 20 (&I: 3,4) ¡

k|n & k|m & ≤[(dxm),(cxn)] ,! 21 (&I: 19,20) ¡

(k|n & k|m & ≤[(dxm),(cxn)] ⇒ k|((cxn) - (dxm)))
,! 22 (∀E: C1.30) ¡

k|n & k|m & ≤[(dxm),(cxn)] ⇒ k|((cxn) - (dxm))
,! 23 (()E: 22) ¡

k|((cxn) - (dxm)) ,! 24 (⇒E: 21,23) ¡

k|(n Δ m) ,! 25 (=E: 18,24) ¡

k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m) ,! 26 (⇒I: 2,25) ¡

(k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m)) ,! 27 (()I: 26) ¡

∀n∀m∀k (k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m))
! 28 (∀I: 1,27) ¡

□

! **53.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ k|(n Δ m)) ¡

n,m,k ,! 1 (Prem) ¡

k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 2 (Prem) ¡

k|n ,! 3 (&E: 2) ¡

k|m ,! 4 (&E: 2) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 5 (&E: 2) ¡

¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0 ,! 6 (()E: 5) ¡

¬ n = 0 ,! 7 (Prem) ¡

k|n & k|m ,! 8 (&I: 3,4) ¡

k|n & k|m & ¬ n = 0 ,! 9 (&I: 7,8) ¡

(k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m))
,! 10 (∀E: P52) ¡

k|n & k|m & ¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m) ,! 11 (()E: 10) ¡

k|(n Δ m) ,! 12 (⇒E: 9,11) ¡

¬ n = 0 ⇒ k|(n Δ m) ,! 13 (⇒I: 7,12) ¡

¬ m = 0 ,! 14 (Prem) ¡

k|m & k|n ,! 15 (&I: 3,4) ¡

k|m & k|n & ¬ m = 0 ,! 16 (&I: 14,15) ¡

(k|m & k|n & ¬ m = 0 ⇒ k|(m Δ n))
,! 17 (∀E: P52) ¡

k|m & k|n & ¬ m = 0 ⇒ k|(m Δ n) ,! 18 (()E: 17) ¡

k|(m Δ n) ,! 19 (⇒E: 16,18) ¡

(k|n ⇒ ω[n]) ,! 20 (∀E: C1.4) ¡

k|n ⇒ ω[n] ,! 21 (()E: 20) ¡

ω[n] ,! 22 (⇒E: 3,21) ¡

(k|m ⇒ ω[m]) ,! 23 (∀E: C1.4) ¡

k|m ⇒ ω[m] ,! 24 (()E: 23) ¡

ω[m] ,! 25 (⇒E: 4,24) ¡

ω[n] & ω[m] ,! 26 (&I: 22,25) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 27 (&I: 5,26) ¡

(ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ (m Δ n) = (n Δ m))
,! 28 (∀E: P42) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ (**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**)
,! 29 (()E: 28) ¡

(**m** Δ **n**) = (**n** Δ **m**) ,! 30 (⇒E: 27,29) ¡

k|(**n** Δ **m**) ,! 31 (=E: 19,30) ¡

¬ **m** = 0 ⇒ **k**|(**n** Δ **m**) ,! 32 (⇒I: 14,31) ¡

k|(**n** Δ **m**) ,! 33 (∨E: 6,13,32) ¡

k|**n** & **k**|**m** & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ **k**|(**n** Δ **m**)
,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

(**k**|**n** & **k**|**m** & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ⇒ **k**|(**n** Δ **m**))
,! 35 (()I: 34) ¡

∀n∀m∀k (k|n & k|m & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ⇒ k|(n Δ m))
! 36 (∀I: 1,35) ¡

▯

! **54.** P54 is a lemma to Euclid's Lemma (P55), where the assumption that n is non-zero is dropped. ¡

⊢ ∀n∀m∀k (n|(m x k) & (n Δ m) = 1 & ¬ n = 0 ⇒ n|k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

n|(m x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 & ¬ **n** = 0 ,! 2 (Prem) ¡

n|(m x **k**) ,! 3 (&E: 2) ¡

(**n** Δ **m**) = 1 ,! 4 (&E: 2) ¡

¬ **n** = 0 ,! 5 (&E: 2) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & (¬ **n** = 0 ∨ ¬ **m** = 0) ,! 6 (▯P: P28,4) ¡

ω[**n**] ,! 7 (&E: 6) ¡

ω[**m**] ,! 8 (&E: 6) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] ,! 9 (&I: 7,8) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ,! 10 (&I: 5,9) ¡

(ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**)))
,! 11 (∀E: P51) ¡

ω[**n**] & ω[**m**] & ¬ **n** = 0 ⇒ ∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**))
,! 12 (()E: 11) ¡

∃c∃d (**n** Δ **m**) = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 13 (⇒E: 10,12) ¡

∃c∃d 1 = ((cx**n**) - (dx**m**)) ,! 14 (=E: 4,13) ¡

∃d 1 = ((**c**x**n**) - (dx**m**)) ,! 15 (∃E: 14) ¡

1 = ((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) ,! 16 (∃E: 15) ¡

∃x (**n** x x) = (**m** x **k**) ,! 17 (𝕊E: C1.1,16) ¡

(**n** x **x**) = (**m** x **k**) ,! 18 (∃E: 17) ¡

ω[**m**] & ω[**k**] ,! 19 (𝕋E: V7.9,18) ¡

ω[**k**] ,! 20 (&E: 19) ¡

ω[1] & ω[**k**] ,! 21 (&I: IV9.2,20)
¡

ω[1] & ω[**k**] & 1 = ((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) ,! 22 (&I: 16,21) ¡

≤[(**d**x**m**),(**c**x**n**)] ,! 23 (𝕋E: V5.7,16) ¡

(ω[1] & ω[**k**] & 1 = ((**c**x**n**) - (**d**x**m**))
⇒ (1 x **k**) = (((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) x **k**))
,! 24 (∀E: V8.1;
((**c**x**n**) - (**d**x**m**)): V5.7,23)
¡

ω[1] & ω[**k**] & 1 = ((**c**x**n**) - (**d**x**m**))
⇒ (1 x **k**) = (((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) x **k**)
,! 25 (()E: 24) ¡

(1 x **k**) = (((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) x **k**) ,! 26 (⇒E: 22,25) ¡

(ω[**k**] ⇒ (1 x **k**) = **k**) ,! 27 (∀E: V8.14) ¡

ω[**k**] ⇒ (1 x **k**) = **k** ,! 28 (()E: 27) ¡

(1 x **k**) = **k** ,! 29 (⇒E: 20,28) ¡

k = (((**c**x**n**) - (**d**x**m**)) x **k**) ,! 30 (=E: 26,29) ¡

ω[**c**] & ω[**n**] ,! 31 (𝕋E: V7.9,23) ¡

(ω[**c**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**c**x**n**)]) ,! 32 (∀E: V7.10) ¡

ω[**c**] & ω[**n**] ⇒ ω[(**c**x**n**)] ,! 33 (()E: 32) ¡

ω[(**c**x**n**)] ,! 34 (⇒E: 31,33) ¡

ω[**d**] & ω[**m**] ,! 35 (𝕋E: V7.9,23) ¡

(ω[**d**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**d**x**m**)]) ,! 36 (∀E: V7.10) ¡

ω[**d**] & ω[**m**] ⇒ ω[(**d**x**m**)] ,! 37 (()E: 36) ¡

ω[(dxm)] ,! 38 (⇒E: 35,37) ¡

ω[(cxn)] & ω[(dxm)] ,! 39 (&I: 34,38) ¡

ω[(cxn)] & ω[(dxm)] & ω[k] ,! 40 (&I: 20,39) ¡

(ω[(cxn)] & ω[(dxm)] & ω[k]
⇒ (((cxn) + (dxm)) x k) = (((cxn) x k) + ((dxm) x k)))
,! 41 (∀E: V8.16;
(cxn): V7.9,31;
(dxm): V7.9,35)) ¡

ω[(cxn)] & ω[(dxm)] & ω[k]
⇒ (((cxn) + (dxm)) x k) = (((cxn) x k) + ((dxm) x k))
,! 42 (()E: 41) ¡

(((cxn) + (dxm)) x k) = (((cxn) x k) + ((dxm) x k))
,! 43 (⇒E: 40,42) ¡

k = (((cxn) x k) + ((dxm) x k)) ,! 44 (=E: 30,43) ¡

ω[c] ,! 45 (&E: 31) ¡

ω[n] & ω[c] ,! 46 (&I: 7,45) ¡

(ω[n] & ω[c] ⇒ n|(cxn)) ,! 47 (∀E: C1.9) ¡

ω[n] & ω[c] ⇒ n|(cxn) ,! 48 (()E: 47) ¡

n|(cxn) ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

n|(cxn) & ω[k] ,! 50 (&I: 20,49) ¡

(n|(cxn) & ω[k] ⇒ n|((cxn) x k)) ,! 51 (∀E: C1.27;
(cxn): V7.9,31) ¡

n|(cxn) & ω[k] ⇒ n|((cxn) x k) ,! 52 (()E: 51) ¡

n|((cxn) x k) ,! 53 (⇒E: 50,52) ¡

ω[d] ,! 54 (&E: 35) ¡

ω[d] & ω[m] ,! 55 (&I: 8,54) ¡

ω[d] & ω[m] & ω[k] ,! 56 (&I: 20,55) ¡

(ω[d] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((dxm) x k) = (d x (mxk)))
,! 57 (∀E: V8.28) ¡

ω[d] & ω[m] & ω[k] ⇒ ((dxm) x k) = (d x (mxk))
,! 58 (()E: 57) ¡

((**d**xm) x **k**) = (**d** x (mx**k**)) ,! 59 (⇒E: 56,58) ¡

n|(mx**k**) & ω[**d**] ,! 60 (&I: 3,54) ¡

(**n**|(mx**k**) & ω[**d**] ⇒ **n**|(**d** x (mx**k**))) ,! 61 (∀E: C1.28; (mx**k**): V7.9,19) ¡

n|(mx**k**) & ω[**d**] ⇒ **n**|(**d** x (mx**k**)) ,! 62 (()E: 61) ¡

n|(**d** x (mx**k**)) ,! 63 (⇒E: 60,62) ¡

n|((**d**xm) x **k**) ,! 64 (=E: 59,63) ¡

n|((**c**x**n**) x **k**) & **n**|((**d**xm) x **k**) ,! 65 (&I: 53,64) ¡

ω[(**c**x**n**)] & ω[**k**] ,! 66 (&I: 20,34) ¡

ω[(**d**xm)] & ω[**k**] ,! 67 (&I: 20,38) ¡

(**n**|((**c**x**n**) x **k**) & **n**|((**d**xm) x **k**)
⇒ **n**|(((**c**x**n**) x **k**) + ((**d**xm) x **k**)))
,! 68 (∀E: C1.25; ((**c**x**n**) x **k**): V7.9,66; ((**d**xm) x **k**): V7.9,67) ¡

n|((**c**x**n**) x **k**) & **n**|((**d**xm) x **k**)
⇒ **n**|(((**c**x**n**) x **k**) + ((**d**xm) x **k**))
,! 69 (()E: 68) ¡

n|(((**c**x**n**) x **k**) + ((**d**xm) x **k**)) ,! 70 (⇒E: 65,69) ¡

n|**k** ,! 71 (=E: 44,70) ¡

n|(m x **k**) & (**n** Δ m) = 1 & ¬ **n** = 0 ⇒ **n**|**k**
,! 72 (⇒I: 2,71) ¡

(**n**|(m x **k**) & (**n** Δ m) = 1 & ¬ **n** = 0 ⇒ **n**|**k**)
,! 73 (()I: 72) ¡

∀n∀m∀k (n|(m x k) & (n Δ m) = 1 & ¬ n = 0 ⇒ n|k)
! 74 (∀I: 1,73) ¡

□

! **55. Euclid's Lemma.** ¡

⊢ ∀n∀m∀k (n|(m x k) & (n Δ m) = 1 ⇒ n|k) ¡

n,**m**,**k** ,! 1 (Prem) ¡

n|(**m** x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 ,! 2 (Prem) ¡

(**n** = 0 ∨ ¬ **n** = 0) ,! 3 (∀E: I3.4) ¡

n = 0 ∨ ¬ n = 0 ,! 4 (()E: 3) ¡

n = 0 ,! 5 (Prem) ¡

n|(m x k) ,! 6 (&E: 2) ¡

(n ∆ m) = 1 ,! 7 (&E: 2) ¡

0|(m x k) ,! 8 (=E: 5,6) ¡

∃x (0 x x) = (m x k) ,! 9 (𝕊E: C1.1,8) ¡

(0 x x) = (m x k) ,! 10 (∃E: 9) ¡

ω[m] & ω[k] ,! 11 (𝕋E: V7.9,10) ¡

(0|(m x k) ⇒ (m x k) = 0) ,! 12 (∀E: C1.12; (m x k): V7.9,11) ¡

0|(m x k) ⇒ (m x k) = 0 ,! 13 (()E: 12) ¡

(m x k) = 0 ,! 14 (⇒E: 8,13) ¡

ω[n] & ω[m] & (¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 15 (𝔻P: P28,7) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) ,! 16 (&E: 15) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & n = 0 ,! 17 (&I: 5,16) ¡

((¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & n = 0 ⇒ ¬ m = 0) ,! 18 (∀E: I3.7) ¡

(¬ n = 0 ∨ ¬ m = 0) & n = 0 ⇒ ¬ m = 0 ,! 19 (()E: 18) ¡

¬ m = 0 ,! 20 (⇒E: 17,19) ¡

(m x k) = 0 & ¬ m = 0 ,! 21 (&I: 14,20) ¡

((m x k) = 0 & ¬ m = 0 ⇒ k = 0) ,! 22 (∀E: V8.37) ¡

(m x k) = 0 & ¬ m = 0 ⇒ k = 0 ,! 23 (()E: 22) ¡

k = 0 ,! 23 (⇒E: 21,23) ¡

n|0 ,! 24 (=E: 6,14) ¡

n|k ,! 25 (=E: 23,24) ¡

n = 0 ⇒ n|k ,! 26 (⇒I: 5,25) ¡

¬ n = 0 ,! 27 (Prem) ¡

n|(m x k) & (n ∆ m) = 1 & ¬ n = 0 ,! 28 (&I: 2,27) ¡

(**n**|(m x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 & ¬ **n** = 0 ⇒ **n**|**k**) ,! 29 (∀E: P54) ¡

n|(m x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 & ¬ **n** = 0 ⇒ **n**|**k** ,! 30 (()E: 29) ¡

n|**k** ,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

¬ **n** = 0 ⇒ **n**|**k** ,! 32 (⇒I: 27,31) ¡

n|**k** ,! 33 (∨E: 4,26,32) ¡

n|(m x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 ⇒ **n**|**k** ,! 34 (⇒I: 2,33) ¡

(**n**|(m x **k**) & (**n** Δ **m**) = 1 ⇒ **n**|**k**) ,! 35 (()I: 34) ¡

∀n∀m∀k (n|(m x k) & (n Δ m) = 1 ⇒ n|k) ! 36 (∀I: 1,35) ¡

▯

! **56.** P56 is the basis of Euclid's Algorithm. ¡

⊢ ∀a∀b∀q∀r (¬ b = 0 & a = ((qxb) + r) ⇒ (a Δ b) = (b Δ r)) ¡

a,**b**,**q**,**r** ,! 1 (Prem) ¡

¬ **b** = 0 & **a** = ((**q**x**b**) + **r**) ,! 2 (Prem) ¡

¬ **b** = 0 ,! 3 (&E: 2) ¡

a = ((**q**x**b**) + **r**) ,! 4 (&E: 2) ¡

ω[(**q**x**b**)] & ω[**r**] ,! 5 (𝕋E: V1.7,4) ¡

ω[(**q**x**b**)] ,! 6 (&E: 5) ¡

ω[**r**] ,! 7 (&E: 5) ¡

ω[**q**] & ω[**b**] ,! 8 (𝕋E; V7.9,6) ¡

ω[**q**] ,! 9 (&E: 8) ¡

ω[**b**] ,! 10 (&E: 8) ¡

(**a** = ((**q**x**b**) + **r**) ⇒ ω[**a**]) ,! 11 (∀E: V1.11; (**q**x**b**): V7.9,8) ¡

a = ((**q**x**b**) + **r**) ⇒ ω[**a**] ,! 12 (()E: 11) ¡

ω[**a**] ,! 13 (⇒E: 4,12) ¡

ω[**a**] & ω[**b**] ,! 14 (&I: 10,13) ¡

¬ **a** = 0 ∨ ¬ **b** = 0 ,! 15 (∨I: 3) ¡

$(\neg\ \mathbf{a} = 0 \vee \neg\ \mathbf{b} = 0)$,! 16 (()I: 15) ¡

$\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \omega[\mathbf{b}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{a} = 0 \vee \neg\ \mathbf{b} = 0)$,! 17 (&I: 14,16) ¡

$\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \omega[\mathbf{r}]$,! 18 (&I: 7,10) ¡

$\neg\ \mathbf{b} = 0 \vee \neg\ \mathbf{r} = 0$,! 19 (∨I: 3) ¡

$(\neg\ \mathbf{b} = 0 \vee \neg\ \mathbf{r} = 0)$,! 20 (()I: 19) ¡

$\omega[\mathbf{b}]\ \&\ \omega[\mathbf{r}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{b} = 0 \vee \neg\ \mathbf{r} = 0)$,! 21 (&I: 18,20) ¡

$(\ \omega[\mathbf{a}]\ \&\ \omega[\mathbf{b}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{a} = 0 \vee \neg\ \mathbf{b} = 0)$
$\Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}\ )$
,! 22 (∀E: P31) ¡

$\omega[\mathbf{a}]\ \&\ \omega[\mathbf{b}]\ \&\ (\neg\ \mathbf{a} = 0 \vee \neg\ \mathbf{b} = 0)$
$\Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}$
,! 23 (()E: 22) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}$,! 24 (⇒E: 17,23) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}$,! 25 (&E: 24) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}$,! 26 (&E: 24) ¡

$\mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r})\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}$,! 27 (&I: 4,25) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}\ \&\ \omega[\mathbf{q}]$,! 28 (&I: 9,26) ¡

$(\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}\ \&\ \omega[\mathbf{q}] \Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})\ )$
,! 29 (∀E: C1.28;
$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})$: P28,17) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{b}\ \&\ \omega[\mathbf{q}] \Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})$,! 30 (()E: 29) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})$,! 31 (⇒E: 28,30) ¡

$\mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r})\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})$
,! 32 (&I: 27,31) ¡

$(\ \mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r})\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})$
$\Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{r}\ )$
,! 33 (∀E: C1.36;
$(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b})$: V7.9,8;
$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})$: P28,17) ¡

$\mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r})\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{a}\ \&\ (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|(\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{r}$
,! 34 (()E: 33) ¡

$(\mathbf{a}\ \Delta\ \mathbf{b})|\mathbf{r}$,! 35 (⇒E: 32,34) ¡

(a Δ b)|b & (a Δ b)|r ,! 36 (&I: 26,35) ¡

(a Δ b)|b & (a Δ b)|r & ¬ b = 0 ,! 37 (&I: 3,36) ¡

((a Δ b)|b & (a Δ b)|r & ¬ b = 0 ⇒ (a Δ b)|(b Δ r))
,! 38 (∀E: P52;
(a Δ b): P28,17) ¡

(a Δ b)|b & (a Δ b)|r & ¬ b = 0 ⇒ (a Δ b)|(b Δ r)
,! 39 (()E: 38) ¡

(a Δ b)|(b Δ r) ,! 40 (⇒E: 37,39) ¡

(ω[b] & ω[r] & (¬ b = 0 ∨ ¬ r = 0)
⇒ (b Δ r)|b & (b Δ r)|r)
,! 41 (∀E: P31) ¡

ω[b] & ω[r] & (¬ b = 0 ∨ ¬ r = 0) ⇒ (b Δ r)|b & (b Δ r)|r
,! 42 (()E: 41) ¡

(b Δ r)|b & (b Δ r)|r ,! 43 (⇒E: 21,42) ¡

(b Δ r)|b ,! 44 (&E: 43) ¡

(b Δ r)|r ,! 45 (&E: 43) ¡

(b Δ r)|b & ω[q] ,! 46 (&I: 9,44) ¡

((b Δ r)|b & ω[q] ⇒ (b Δ r)|(qxb))
,! 47 (∀E: C1.28;
(b Δ r): P28,21) ¡

(b Δ r)|b & ω[q] ⇒ (b Δ r)|(qxb) ,! 48 (()E: 47) ¡

(b Δ r)|(qxb) ,! 49 (⇒E: 46,48) ¡

a = ((qxb) + r) & (b Δ r)|(qxb) ,! 50 (&I: 4,49) ¡

a = ((qxb) + r) & (b Δ r)|(qxb) & (b Δ r)|r
,! 51 (&I: 45,50) ¡

(a = ((qxb) + r) & (b Δ r)|(qxb) & (b Δ r)|r
⇒ (b Δ r)|a)
,! 52 (∀E: C1.35;
(b Δ r): P28,21) ¡

a = ((qxb) + r) & (b Δ r)|(qxb) & (b Δ r)|r ⇒ (b Δ r)|a
,! 53 (()E: 52) ¡

(b Δ r)|a ,! 54 (⇒E: 51,53) ¡

(b Δ r)|a & (b Δ r)|b ,! 55 (&I: 44,54) ¡

$(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{a}$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{b}$ & $(\neg\ \mathbf{a} = 0 \lor \neg\ \mathbf{b} = 0)$
,! 56 (&I: 16,55) ¡

$(\ (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{a}$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{b}$ & $(\neg\ \mathbf{a} = 0 \lor \neg\ \mathbf{b} = 0)$
$\Rightarrow (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})\ )$
,! 57 (∀E: P53;
$(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$: P28,21) ¡

$(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{a}$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|\mathbf{b}$ & $(\neg\ \mathbf{a} = 0 \lor \neg\ \mathbf{b} = 0)$
$\Rightarrow (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})$
,! 58 (()E: 57) ¡

$(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})$,! 59 (⇒E: 56,58) ¡

$(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})|(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})$,! 60 (&I: 40,59) ¡

$(\ (\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})|(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})\ )$
,! 61 (∀E: C1.23;
$(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})$: P28,17;
$(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$: P28,21) ¡

$(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b})|(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$ & $(\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})|(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$
,! 62 (()E: 61) ¡

$(\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$,! 63 (⇒E: 60,62) ¡

$\neg\ \mathbf{b} = 0$ & $\mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})$
,! 64 (⇒I: 2,63) ¡

$(\ \neg\ \mathbf{b} = 0$ & $\mathbf{a} = ((\mathbf{q}\mathrm{x}\mathbf{b}) + \mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{a} \Delta \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \Delta \mathbf{r})\ )$
,! 65 (()I: 64) ¡

$\forall a \forall b \forall q \forall r\ (\ \neg\ b = 0$ & $a = ((q\mathrm{x}b) + r) \Rightarrow (a \Delta b) = (b \Delta r)\ )$
! 66 (∀I: 1,65) ¡

▯